

**ГИСТЕРЕЗИС ВОДОУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПОЧВЫ: ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ
И ВЕРИФИКАЦИЯ**

В. В. Терлеев¹, А. Г. Топаж², Е. А. Дунаева³, Р. С. Гиневский¹, В. А. Лазарев¹

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29;

² ООО «Бюро Гиперборея», 193312, Санкт-Петербург, ул. Подвойского, 40-2;

³ Научно-исследовательский институт сельского хозяйства Крыма, 295543, г. Симферополь, ул. Киевская, 150
E-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru

Поступила в редакцию 03 апреля 2019 г., принята к печати 27 мая 2019 г.

Рассмотрены причины гистерезиса водоудерживающей способности почвы. Предложено объяснение замкнутой петли, которая образуется главными ветвями иссушения и увлажнения, а также разомкнутых петель, которые образуются с участием сканирующих ветвей гистерезиса. Проанализирована проблема искусственного (методического) «эффекта помпы», который возможен, когда параметры функции водоудерживающей способности почвы, используемой при описании феномена гистерезиса, являются формальными и не имеют физического смысла. Представлены математические модели, описывающие данный феномен. В них используются три функции водоудерживающей способности почвы: (i) функция Ван Генухтена, (ii) усовершенствованная функция Косути, (iii) усовершенствованная функция Хаверкампа с соавторами. Усовершенствование функций (ii) и (iii) достигнуто посредством применения физически интерпретированного дополнительного аддитивного параметра, учитывающего давление «входа воздуха» для ветвей иссушения и давление «входа воды» для ветвей увлажнения водоудерживающей способности почвы. Охарактеризованы перспективы использования моделей гистерезиса для расчета прецизионных норм орошения в мелиоративном земледелии. С использованием критерия Вильямса-Клута проведен сравнительный анализ представленных моделей гистерезиса в отношении погрешности точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях (для идентификации параметров), а также в отношении погрешности оценки сканирующих ветвей водоудерживающей способности на примере почвы «4126 *Molonglo river sand*».

Ключевые слова: математическая модель, главные и сканирующие ветви гистерезиса, точечная аппроксимация опытных данных, прогнозирование, критерий Вильямса-Клута.

**HYSTERESIS OF WATER-RETENTION CAPACITY OF SOIL:
FUNCTIONAL DESCRIPTION AND VERIFICATION**

V. V. Terleev¹, A. G. Topaj², E. A. Dunaeva³, R. S. Ginevskyi¹, V. A. Lazarev¹

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
29, Polytechnicheskaya St., Saint-Petersburg, 195251, Russia;

² LLC «Bureau Hyperborea», 40-2, Podvoiskogo St., Saint-Petersburg, 193312, Russia;

³ Federal State Budget Scientific Institution «Research Institute of Agriculture of Crimea»,
150, Kievskaya St., Simferopol, 295543, Russia
E-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru

The paper considers the causes of hysteresis of the soil water-retention capacity. An explanation of the closed loop, which is formed by the main branches of drying and wetting, as well as open loops, which are formed with the participation of scanning hysteresis branches, is proposed. The problem of the artificial (methodical) «pump effect» is analyzed. This effect is possible when the parameters of the function of the soil water-retention capacity which are used to describe the hysteresis phenomenon are formal and have no physical meaning. Mathematical models describing this phenomenon are presented. They use three functions of soil water-retention capacity: (i) Van Genuchten function, (ii) improved Kosugi function, (iii) improved Haverkamp with co-authors function. The improvement of functions (ii) and (iii) is achieved by applying a physically interpreted additional additive parameter that takes into account the «air entrance» pressure for the drying branches and the «water entrance» pressure for the wetting branches of the soil water-retention capacity. The prospects of using hysteresis models for calculating precision irrigation rates in land reclamation agriculture are characterized. Using the Williams-Klout criterion, a comparative analysis of the presented hysteresis models was carried out regarding the error of the dot-approximation of experimental data on the main branches (for parameter identification), as well as regarding the error in estimating the scanning branches of water-retention capacity on the example of «4126 *Molonglo river sand*».

Key words: mathematical model, main and scanning branches of hysteresis, dot-approximation of experimental data, prediction, Williams-Klout criterion.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, «классическая» кривая водоудерживающей способности почвы представляет собой изотерму квазиравновесных десорбционных состояний влаги в почве. Данная кривая описывает главную ветвь иссушения гистерезиса водоудерживающей способности почвы. Наряду с ветвью иссушения существуют также главная ветвь увлажнения и сканирующие ветви гистерезиса водоудерживающей способности почвы.

Понятие гистерезиса не является новым. Феномен гистерезиса характерен для многих физических свойств объектов природы. К настоящему времени сложился ряд представлений относительно причин данного феномена. Однако следует признать, что сложившиеся представления не всегда соответствуют физической природе гистерезиса. Например, представление о том, что причиной гистерезиса является различие в углах смачивания стенок почвенных капилляров водой для ветвей иссушения и увлажнения водоудерживающей способности почвы, довольно спорное. Действительно, углы смачивания могут отличаться при иссушении и увлажнении, однако это может иметь отношение только к процессам иссушения и увлажнения почвы, но не к ветвям ее водоудерживающей способности, поскольку водоудерживающая способность - это важнейшее гидрофизическое свойство почвы, которое обуславливает множество термодинамически квазиравновесных состояний влаги в почве. Данное свойство формулируется в виде зависимости между величинами объемной влажности почвы θ [см³ см⁻³] и капиллярного давления (капиллярно-сорбционного потенциала) влаги ψ [см H₂O]. Иссушение и увлажнение почвы не относятся к таким состояниям, поскольку они представляют собой процессы установления того или иного квазиравновесного состояния. Вместе с тем идея о том, что к причинам гистерезиса относится «эффект четок», обусловленный изменчивостью площади поперечного сечения почвенных пор, является вполне рациональной. По мнению авторов, к причинам гистерезиса также следует отнести различия между значением давления влаги при начальном иссушении исходно полностью насыщенного влагой почвы (давление «входа воздуха») и значением давления влаги на завершающей стадии увлажнения почвы (давление вытеснения защемленного воздуха из пор, или давление «входа воды»). «Эффект четок» можно учесть с помощью двух параметров (мультипликативного и экспоненциального) нормального распределения логарифмов эффективных радиусов капиллярных пор. Различия в значениях давления «входа воздуха» и «входа воды», по мнению авторов, следует учитывать с помощью третьего аддитивного параметра с размерностью капиллярного давления (капиллярно-сорбционного потенциала) влаги. То есть для моделирования ветвей иссушения можно использовать одну тройку значений параметров, а для моделирования ветвей увлажнения – другую.

Петля гистерезиса, образованная главными ветвями иссушения и увлажнения водоудерживающей способности почвы (не набухающей при увлажнении), должна быть замкнутой по физическому смыслу: во-

первых, для ветвей иссушения и увлажнения максимальное значение объемной влажности почвы (влажность насыщения) должно быть одним и тем же, поскольку пористость остается неизменной; во-вторых, для ветвей иссушения и увлажнения минимальное значение объемной влажности почвы должно быть одним и тем же, поскольку максимальная гигроскопичность также остается неизменной. При этом следует отметить, что сканирующие ветви являются разомкнутыми: они не могут пересекать главные ветви гистерезиса водоудерживающей способности почвы, поскольку в противоположном случае в точке пересечения функция дифференциальной влагоемкости почвы $d\theta/d\psi$ будет иметь множество значений, что физически абсурдно.

Измерение сканирующих ветвей гистерезиса водоудерживающей способности почвы является весьма трудоемкой операцией. Вместе с тем данные о сканирующих ветвях увлажнения являются весьма ценными при решении практических задач ирригационного земледелия. Действительно, при орошении почва переходит из состояний с низким влагосодержанием к состояниям с более высоким влагосодержанием, и смена состояний соответствует ветвями увлажнения, а не ветвям иссушения. Тем не менее в практике ирригационного земледелия до сих пор применяется методика расчета норм орошения с использованием именно главной ветви иссушения. В качестве примера можно рассмотреть применение данной методики в случае отсутствия капиллярно-подпертой влаги. На главной ветви иссушения имеется особая точка, которая характеризует границу перехода влаги из категории гравитационной в категорию капиллярно-подвешенной. Указанной точке соответствует значение объемной влажности почвы, которое называется наименьшей влагоемкостью почвы (НВ). В свою очередь, значению НВ соответствует капиллярное давление влаги при НВ. В состояниях с более низкими (отрицательными) значениями капиллярного давления влаги по сравнению с капиллярным давлением при НВ вода в почве удерживается капиллярно-сорбционными силами. В состояниях с более высокими значениями капиллярного давления влаги по сравнению с капиллярным давлением при НВ вода стекает в расположенные ниже слои почвенно-грунтовой толщи под действием силы тяжести. Важно отметить, что на любой сканирующей ветви в точке, которая соответствует капиллярному давлению влаги при НВ, значение объемной влажности почвы является более низким, чем НВ. Следовательно, если норма орошения вычисляется по разности между НВ и предполивной влажностью почвы, то такая норма всегда оказывается завышенной (Terleev et al., 2015). Данное обстоятельство хорошо известно практикам-мелиораторам. Разумеется, для расчета норм орошения должны использоваться сканирующие ветви увлажнения гистерезиса водоудерживающей способности почвы. Однако в подобном случае возникает весьма существенное затруднение. Оно заключается в том, что те сканирующие ветви увлажнения, которые могут понадобиться для расчета норм орошения на предстоящий вегетационный период

(для условий сельскохозяйственного поля), измерить заранее практически невозможно, что обусловлено непредсказуемым характером выпадения атмосферных осадков, а заблаговременно измерить исчерпывающий набор сканирующих ветвей не представляется возможным даже теоретически. В связи с этим единственным выходом из данного затруднительного положения является разработка и применение физически обоснованной математической модели гистерезиса водоудерживающей способности почвы. Целью настоящего исследования является верификация указанной модели с использованием хорошо известных данных из такого авторитетного источника, как каталог Муалема (Mualem, 1976). Использование данных из такого рода источников является принципиальной позицией авторов, поскольку в подобном случае имеется объективная возможность убедиться в достоверности полученных результатов и обоснованности выводов исследования.

ОБЪЕКТЫ И МЕТОДЫ

В статье (Terleev et al., 2017a) для функции водоудерживающей способности почвы предлагается следующее описание:

$$S_e = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{n\sqrt{\pi}}{4} \ln(-\alpha \psi - \psi_e) \right), & \psi < \psi_e; \\ 1, & \psi \geq \psi_e, \end{cases} \quad (1)$$

где $S_e = (\theta - \theta_r / \theta_s - \theta_r)$ – эффективное влагонасыщение почвы; θ [см³ см⁻³] – объемная влажность почвы; θ_s [см³ см⁻³] – объемная влажность насыщения почвы; θ_r [см³ см⁻³] – объемная влажность почвы, соответствующая минимальному удельному объёму почвенной влаги как жидкости; ψ [см H₂O] – капиллярное давление (капиллярно-сорбционный потенциал) влаги в почве; $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ –

дополнительная функция ошибок; $n > 0$, $\alpha = -1(\psi_0 - \psi_e)$ [см H₂O⁻¹], ψ_e [см H₂O], ψ_0 [см H₂O] < ψ_e – интерпретированные параметры (с учетом гистерезиса: для ветвей иссушения $\psi_e \leq 0$; для ветвей увлажнения $\psi_e \geq 0$).

Функция (1) представляет собой более общее описание водоудерживающей способности почвы, которое ранее было предложено Косуги, поэтому в настоящей работе функция (1) называется усовершенствованной функцией Косуги. В ней присутствует аддитивный параметр ψ_e с размерностью капиллярного давления влаги, при $\psi_e = 0$ данная функция сводится к оригинальной модели водоудерживающей способности почвы, предложенной в статьях (Kosugi, 1994, 1996). Полученный в исследовании (Terleev et al., 2017a) принципиальный результат в виде дополнительного параметра ψ_e побудил к изучению и более общей физической интерпретации данного параметра. Для главной ветви иссушения $\theta(\psi)$, полученной методом пресса Ричардса, параметр ψ_e описывает давление «входа воздуха», для ветвей увлажнения $\theta(\psi)$ – давление «входа воды».

В статье (Terleev et al., 2017a) предложена непрерывная аппроксимация соотношения (1) в классе

элементарных функций с использованием упрощенной формулы Виницкого (Winitzki, 2008):

$$S_e = \begin{cases} (1 + (-\alpha(\psi - \psi_e))^n)^{-1}, & \psi < \psi_e; \\ 1, & \psi \geq \psi_e. \end{cases} \quad (2)$$

Функция (2) в настоящей работе называется усовершенствованной функцией Хаверкампа с соавторами. В ней присутствует тот же аддитивный параметр ψ_e с размерностью капиллярного давления влаги, при $\psi_e = 0$ данная функция сводится к оригинальной модели водоудерживающей способности почвы, предложенной в статье (Haverkamp et al., 1977).

Большинство исследований по проблеме гистерезиса $\theta(\psi)$ является прямым развитием двух известных моделей. Во многих публикациях результаты моделирования гистерезиса $\theta(\psi)$ сравниваются с результатами, полученными при применении двух данных моделей. Поэтому на них следует остановиться более подробно. Первая из них – это модель Скотта с соавторами (Scott et al., 1983), вторая – модель Кула и Паркера (Kool, Parker, 1987). В основу первой модели положена оригинальная функция $\theta(\psi)$, предложенная Хаверкампом с соавторами (Haverkamp et al., 1977), в основу второй модели – оригинальная функция $\theta(\psi)$, предложенная Ван Генухтенем (Van Genuchten, 1980). Для описания водоудерживающей способности почвы Ван Генухтен использует соотношение:

$$S_e = \begin{cases} (1 + (-\alpha\psi)^n)^{-m}, & \psi < 0; \\ 1, & \psi \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

где α [см H₂O⁻¹], n и m – эмпирические параметры ($m = 1 - 1/n$, $n > 1$).

В обеих моделях поворотные точки рассчитываются по алгоритму Скотта с соавторами (Scott et al., 1983). В статье (Huang et al., 2005) отмечается, что модель Скотта с соавторами, а также модель Кула и Паркера имеют существенный недостаток в виде искусственного «эффекта помпы». Данный эффект заключается в том, что при осцилляции капиллярного давления влаги в фиксированном диапазоне значений может возникнуть дрейф значений объемной влажности почвы, при этом сканирующие ветви могут пересекать главные ветви и выходить за пределы физически допустимой области. В связи с этим многие современные авторы разрабатывают модели гистерезиса $\theta(\psi)$ с замкнутыми петлями, образованными сканирующими ветвями. С утверждением относительно «эффекта помпы» можно согласиться лишь частично, а с предложением относительно замкнутых петель гистерезиса, образованных сканирующими ветвями, согласиться невозможно по причине его физической абсурдности. Необходимо дать пояснение относительно «эффекта помпы». Действительно, использование моделей гистерезиса, в основу которых положены функция Хаверкампа с соавторами (Haverkamp et al., 1977) или функция Ван Генухтена (Van Genuchten, 1980), при некоторых значениях параметров может привести к результату, когда сканирующие ветви пересекают главные ветви петель гистерезиса, что физически абсурдно. Такие значения параметров следует охарактеризовать как физически недопустимые. Однако

такую характеристику можно дать только тем параметрам, которые в принципе имеют физический смысл. Для параметров, не имеющих физического смысла, любые значения равноценны (они не могут быть ни абсурдными, ни реалистичными). Иными словами, для параметров, имеющих физический смысл, теоретически возможно указать физически допустимые пределы варьирования, но для параметров, не имеющих физического смысла, таких пределов в принципе не существует. Таким образом, при применении модели Кула и Паркера (Kool, Parker, 1987), в которой используется функция Ван Генухтена (Van Genuchten, 1980) с параметрами, не имеющими физического смысла, проявление искусственного «эффекта помпы» весьма вероятно, поскольку при идентификации параметров методом точечной аппроксимации измеренной водоудерживающей способности почвы могут быть получены практически любые значения. Следует отметить, что Кул и Паркер признают указанный недостаток предложенной ими модели (Kool, Parker, 1987). Совершенно другая ситуация имеет место в отношении модели Скотта с соавторами (Scott et al., 1983). В основу данной модели положена функция Хаверкампа с соавторами (Haverkamp et al., 1977), параметры которой допускают физическую интерпретацию, постольку для них могут быть определены физически допустимые пределы (по крайней мере, теоретически). В случае, когда значения параметров не выходят за допустимые пределы, «эффект помпы» при применении модели Скотта с соавторами (Scott et al., 1983) не проявляется. Данный результат, опубликованный в работе (Terleev et al., 2017b), характеризует уровень понимания проблемы и физической адекватности описания гистерезиса водоудерживающей способности почвы. Однако необходима некоторая «техническая» доработка для уточнения методики практического определения пределов варьирования параметров функции Хаверкампа с соавторами (Haverkamp et al., 1977) с целью предотвращения «эффекта помпы».

Предложенные за последние десять лет идеи относительно замкнутых петель гистерезиса, которые образованы сканирующими ветвями водоудерживающей способности почвы, являются достаточно спорными. Ниже представлено два контраргумента. Во-первых, для того чтобы после поворотной точки сканирующая ветвь достигла поворотной точки, от которой начинается предыдущая сканирующая ветвь, необходимо, чтобы почва обладала «памятью»: подобное абстрактное построение является гипотетически допустимым (и легко реализуемым в виде компьютерной базы данных), однако в природе такой феномен невозможен ни при каких допущениях. Во-вторых, в гипотетическом случае замкнутых петель, которые образованы сканирующими ветвями гистерезиса, в точках пересечения ветвей иссушения или ветвей увлажнения функция дифференциальной влагоемкости почвы имеет бесконечное множество значений (вырождается). Однако, по мнению авторов, в поворотной точке может быть только два значения функции дифференциальной влагоемкости почвы: одно для любой ветви иссушения, другое – для любой ветви увлажнения. Таким образом, идея о замкнутых петлях,

образованных сканирующими ветвями гистерезиса $\theta(\psi)$, в принципе противоречит самому представлению о водоудерживающей способности почвы.

В настоящей работе формулы для расчета сканирующих ветвей гистерезиса применяются исходя из идей Скотта с соавторами о поворотных точках (Scott et al., 1983). При описании гистерезиса $\theta(\psi)$ используются два дополнительных нижних индекса, соответствующих ветвям иссушения и ветвям увлажнения: «d» – для ветвей иссушения и «w» – для ветвей увлажнения. Сканирующие ветви иссушения, начинающиеся от i -й точки на ветви увлажнения, описываются следующими формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \theta_r + (\theta_s^* - \theta_r) S_{e,d}, \\ \theta_s^* = \theta_s, \psi_{e,w} \leq \psi_i, \psi < \psi_{e,d}; \\ \theta_s^* = \theta_i, \psi_{e,d} \leq \psi_i < \psi_{e,w}, \psi < \psi_{e,d}; \\ \theta_s^* = \frac{\theta_i - \theta_r (1 - S_{e,d}(\psi_i))}{S_{e,d}(\psi_i)}, \psi_i < \psi_{e,d}, \psi \leq \psi_i; \\ \theta = \theta_s, \psi_{e,w} \leq \psi_i, \psi_{e,d} \leq \psi \leq \psi_i; \\ \theta = \theta_i, \psi_{e,d} \leq \psi_i < \psi_{e,w}, \psi_{e,d} \leq \psi \leq \psi_i. \end{array} \right. \quad (4)$$

Сканирующие ветви увлажнения, начинающиеся от j -й точки на ветви иссушения, описываются следующими формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \theta_r^* + (\theta_s - \theta_r^*) S_{e,d}, \\ \theta_r^* = \theta_j = \theta_r, \psi_j \ll \psi_{e,d}, \psi_j \leq \psi < \psi_{e,w}; \\ \theta_r^* = \frac{\theta_j - \theta_s S_{e,w}(\psi_i)}{1 - S_{e,w}(\psi_i)}, \psi_j < \psi_{e,d}, \psi_j \leq \psi < \psi_{e,w}; \\ \theta = \theta_s, \psi_j < \psi_{e,d}, \psi_{e,w} \leq \psi; \\ \theta = \theta_j = \theta_s, \psi_{e,d} \leq \psi_j, \psi_j \leq \psi_i. \end{array} \right. \quad (5)$$

Далее представлены результаты сравнения модели гистерезиса, предложенной Скоттом с соавторами (Scott et al., 1983), в которой используются усовершенствованные функции водоудерживающей способности почвы (1) и (2), с моделью гистерезиса, предложенной Кулом и Паркером (Kool, Parker, 1987), в которой используется функция водоудерживающей способности почвы (3). Сравнительный анализ проведен по критерию Вильямса-Клута (Кобзарь, 2006) при условии равенства значений экспоненциального параметра n для ветвей иссушения и увлажнения. Использовать данное условие предложено в статье (Kool, Parker, 1987).

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Модель, предложенная Скоттом с соавторами (Scott et al., 1983), в которой используется усовершенствованная функция водоудерживающей способности почвы (1), далее будет обозначаться через Hys-SKT. Модель, предложенная Скоттом с соавторами (Scott et al., 1983), в которой используется усовершенствованная функция водоудерживающей способности почвы (2), будет обозначаться через Hys-SHT. Модель гистерезиса, предложенная Кулом и Паркером (Kool, Parker, 1987), в которой используется

оригинальная функция водоудерживающей способности почвы (3) Ван Генухтена (Van Genuchten, 1980), будет обозначаться через Hys-KPVG. Сравнительный анализ трех моделей гистерезиса по критерию Вильямса-Клута (Кобзарь, 2006) проведен с использованием данных о почве легкого гранулометрического состава «4126 *Molonglo river sand*» (Mualem, 1976). Параметры сравниваемых моделей идентифицированы методом точечной аппроксимации экспериментальных данных о главных (граничных) ветвях иссушения и увлажнения водоудерживающей $n_d = n_w$ способности почвы. Следует отметить, что в данном исследовании

использованы равные значения параметров: Значения всех сравниваемых параметров представлены в табл. 1.

В табл. 2 приведены коэффициенты корреляции между опытными и расчетными данными о ветвях гистерезиса водоудерживающей способности исследуемой почвы.

В табл. 3 представлены погрешности идентификации параметров моделей путем точечной аппроксимации данных о главных (граничных) ветвях и погрешности оценок (прогнозирования) сканирующих ветвей гистерезиса (корень квадратный из среднего арифметического значения квадратов отклонений результатов вычисления от опытных данных).

Таблица 1. Параметры гидрофизических функций исследуемой почвы

Почва	Модели	Параметры									
		θ_r	θ_s	$\psi_{e,d}$	$\psi_{0,d}$	α_d	$\psi_{e,w}$	$\psi_{0,w}$	α_w	n_d	n_w
4126 <i>Molonglo river sand</i>	Hys-KPVG	0,0536	0,277	–	–9,90	0,101	–	–6,75	0,148	2,16	
	Hys-SKT	0,0808	0,277	0	–14,4	0,0695	5,00	–9,21	0,0704	2,57	
	Hys-SHT	0,0774	0,277	0	–14,7	0,0683	4,79	–9,47	0,0701	2,59	

Таблица 2. Коэффициенты корреляции между результатами расчета и опытными данными о ветвях гистерезиса водоудерживающей способности исследуемой почвы (интервалы для доверительной вероятности = 0,95)

Почва	Ветви гистерезиса	Модели		
		Hys-KPVG	Hys-SKT	Hys-SHT
4126 <i>Molonglo river sand</i>	Главные (граничные): идентификация по 21 точке	0,991±0,052	0,998±0,024	0,998±0,024
	Первичные увлажнения: оценка для 25 точек	0,984±0,063	0,992±0,044	0,990±0,048
	Первичные иссушения: оценка для 32 точек	0,988±0,046	0,989±0,044	0,990±0,042
	Вторичная иссушения: оценка для 6 точек	0,998±0,066	0,998±0,061	0,998±0,061

Таблица 3. Сравнение погрешностей (RMSE – root mean square error):

(i) точечной аппроксимации данных о главных (граничных) ветвях;

(ii) оценки (прогнозирования) сканирующих ветвей гистерезиса водоудерживающей способности исследуемой почвы

Почва	Ветви гистерезиса	Модели		
		Hys-KPVG	Hys-SKT	Hys-SHT
4126 <i>Molonglo river sand</i>	Главные (граничные): идентификация по 21 точке	0,0089	0,0042	0,0042
	Первичные увлажнения: оценка для 25 точек	0,0128	0,0075	0,0080
	Первичные иссушения: оценка для 32 точек	0,0095	0,0107	0,0106
	Вторичная иссушения: оценка для 6 точек	0,0123	0,0048	0,0052

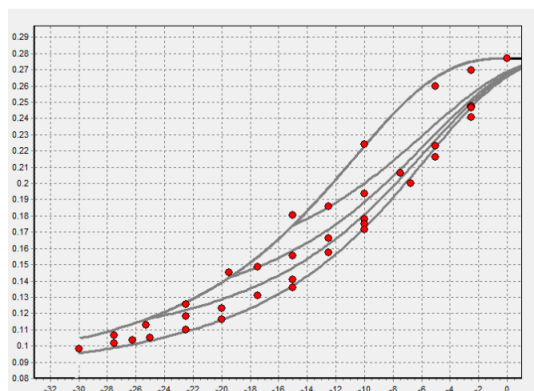
На рис. 1a,b, рис. 2a,b и рис. 3a,b сплошными кривыми показаны результаты точечной аппроксимации данных о главных (граничных) ветвях (идентификация параметров), а также результаты

оценки (прогнозирования) сканирующих первичных ветвей гистерезиса водоудерживающей способности исследуемой почвы. Точками отмечены опытные данные.

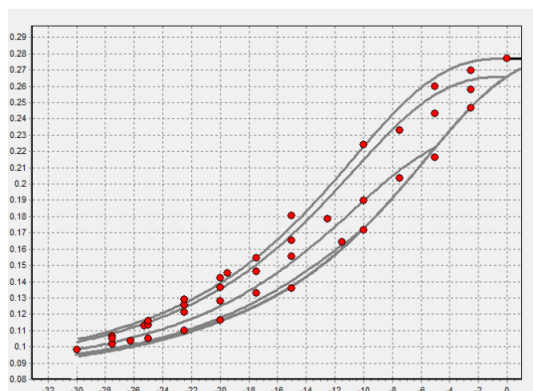
a)

b)

Объемная влажность почвы [$\text{см}^3 \cdot \text{см}^{-3}$]



Капиллярное давление влаги [$\text{см H}_2\text{O}$]



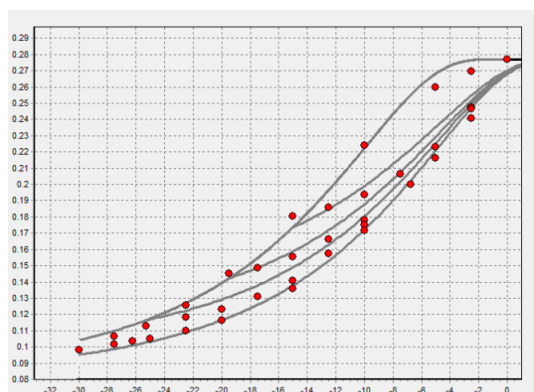
Капиллярное давление влаги [$\text{см H}_2\text{O}$]

Рис. 1 Точечная аппроксимация данных о главных (граничных) ветвях; оценка (прогнозирование) сканирующих первичных ветвей увлажнения (a) и иссушения (b) для почвы 4126 «Molonglo river sand» с использованием модели Hys-SHT ($n_d = n_w$)

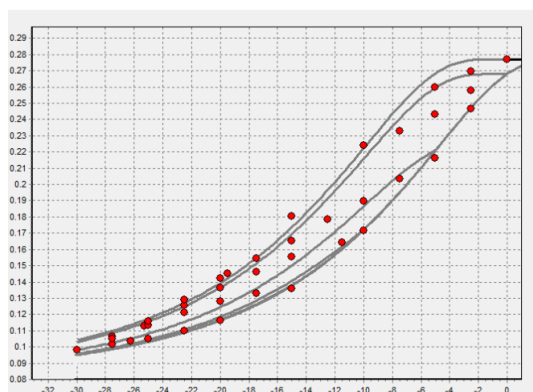
a)

b)

Объемная влажность почвы [$\text{см}^3 \cdot \text{см}^{-3}$]



Капиллярное давление влаги [$\text{см H}_2\text{O}$]



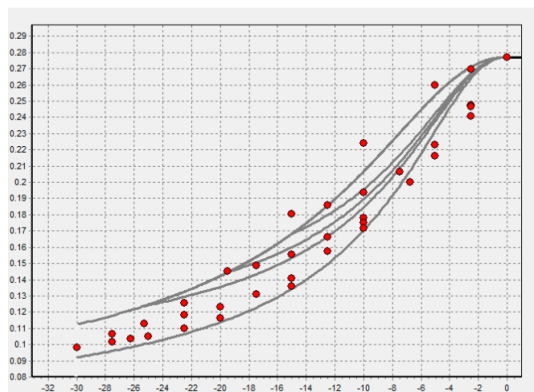
Капиллярное давление влаги [$\text{см H}_2\text{O}$]

Рис. 2a. Точечная аппроксимация данных о главных (граничных) ветвях; оценка (прогнозирование) сканирующих первичных ветвей увлажнения (a) и иссушения (b) для почвы 4126 «Molonglo river sand» с использованием модели Hys-SKT ($n_d = n_w$)

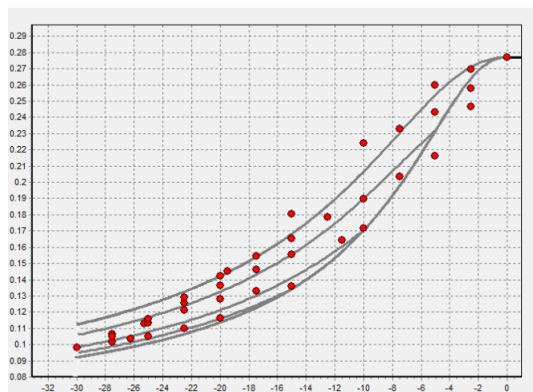
a)

b)

Объемная влажность почвы [$\text{см}^3 \cdot \text{см}^{-3}$]



Капиллярное давление влаги [$\text{см H}_2\text{O}$]



Капиллярное давление влаги [$\text{см H}_2\text{O}$]

Рис. 3a. Точечная аппроксимация данных о главных (граничных) ветвях; оценка (прогнозирование) сканирующих первичных ветвей увлажнения (a) и иссушения (b) для почвы 4126 «Molonglo river sand» с использованием модели Hys-KPVG ($n_d = n_w$)

ВЫВОДЫ

При использовании всех сравниваемых моделей достигнуты достаточно высокие значения коэффициента корреляции между опытными и расчетными данными в отношении всех ветвей гистерезиса водоудерживающей способности

исследуемой почвы. Однако по критерию Вильямса-Клута с доверительной вероятностью 0,95 сравниваемые модели имеют определенные отличия. В отношении точечной аппроксимации данных о главных (граничных) ветвях гистерезиса $\theta(\psi)$ погрешность модели Hys-KPVG достоверно выше, чем погрешности

моделей Hys-SKT и Hys-SHT, при этом погрешности моделей Hys-SKT и Hys-SHT существенно не различаются. В отношении оценки (прогнозирования) сканирующих первичных ветвей увлажнения гистерезиса $\theta(\psi)$ погрешность модели Hys-KPVG достоверно выше, чем погрешности моделей Hys-SKT и Hys-SHT, при этом модель Hys-SKT оказалась более точной, чем модель Hys-SHT. В отношении оценки (прогнозирования) сканирующих первичных ветвей иссушения и вторичной ветви иссушения гистерезиса $\theta(\psi)$ погрешности всех трех сравниваемых моделей статистически неразличимы. Условие равенства значений экспоненциального параметра для ветвей иссушения и увлажнения $n_d = n_w$ существенно не увеличивает погрешность оценки (прогнозирования) сканирующих ветвей

гистерезиса по сравнению с условием неравенства данных значений (Terleev et al., 2018).

Таким образом, для песчаной почвы при расчетах прецизионных норм орошения (Terleev et al., 2015), а также при обосновании проектов гидротехнических сооружений (Badenko et al., 2016) и прогнозировании продуктивности агроценозов (Medvedev et al., 2015) применение моделей гистерезиса водоудерживающей способности Hys-SKT и Hys-SHT представляется более предпочтительным.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №19-04-00939-а, 19-016-00148-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: Физматлит, 2006. 816 с.
- Badenko V., Badenko N., Nikonorov A., Molodtsov D., Terleev V., Lednova J., Maslikov V. Ecological aspect of dam design for flood regulation and sustainable urban development // MATEC Web of Conferences, 2016, no. 73, Article number 03003.
- Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration // Soil Sci. Soc. Am. J., 1977, no. 41, pp. 285–294.
- Huang H. C., Tan Y. C., Chen C. H. A novel hysteresis model in unsaturated soil // Hydrological Processes, 2005, no. 19, pp. 1653–1665.
- Kool J. B., Parker J. C. Development and evaluation of closed-form expressions for hysteretic soil hydraulic properties // Water Resources Research, 1987, no. 23 (1), pp. 105–114.
- Kosugi K. Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention // Water Resour. Res., 1994, no. 30, pp. 891–901.
- Kosugi K. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties // Water Resour. Res., 1996, no. 32, pp. 2697–2703.
- Medvedev S., Topaj A., Badenko V., Terleev V. Medium-term analysis of agroecosystem sustainability under different land use practices by means of dynamic crop simulation // IFIP Advances in Information and Communication Technology, 2015, no. 448, pp. 252–261.
- Mualem Y. A catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils. Research Project 442. Technion, Israel Institute of Technology. Haifa, Israel, 1976. 100 p.
- Scott P. S., Farquhar G. J., Kouwen N. Hysteretic effects on net infiltration. Proceeding of National Conference on Advances in Infiltration, Publication 11-83. American Society of Agricultural Engineers. St. Joseph, Michigan, 1983. pp. 163–170.
- Terleev V., Mirschel W., Nikonorov A., Ginevsky R., Lazarev V., Topaj A., Moiseev K., Layshev K., Arkhipov M., Melnichuk A., Dunaieva I., Popovych V. Five models of hysteretic water-retention capacity and their comparison for sandy soil // MATEC Web of Conferences, 2018, no. 193, Article number 02036.
- Terleev V. V., Topazh A. G., Mirschel W. The improved estimation for the effective supply of productive moisture considering the hysteresis of soil water retention capacity // Russian Meteorology and Hydrology, 2015, no. 40 (4), pp. 278–285.
- Terleev V. V., Mirschel W., Badenko V. L., Guseva I. Yu. An Improved Mualem-Van Genuchten method and its verification using data on Beit Netofa clay // Eurasian Soil Science, 2017a, no. 50 (4), pp. 445–455.
- Terleev V., Ginevsky R., Lazarev V., Nikonorov A., Togo I., Topaj A., Moiseev K., Abakumov E., Melnichuk A., Dunaieva I. Predicting the scanning branches of hysteretic soil water-retention capacity with use of the method of mathematical modeling // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2017b, no. 90, Article number 012105.
- Van Genuchten M. Th. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J., 1980, no. 44, pp. 892–989.
- Winitzki S. A handy approximation for the error function and its inverse. 2008. (in <https://sites.google.com/site/winitzki/sergei-winitzkis-files/erf-approx.pdf?attredirects=0>).

REFERENCES

- Kobzar A. I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnyh rabotnikov* [Applied mathematical statistics. For engineers and scientists]. Moscow: Publishing Fizmatlit, 2006. 816 p.
- Badenko V., Badenko N., Nikonorov A., Molodtsov D., Terleev V., Lednova J., Maslikov V. Ecological aspect of dam design for flood regulation and sustainable urban development // *MATEC Web of Conferences*, 2016, no. 73, Article number 03003.
- Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration // *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1977, no. 41, pp. 285–294.
- Huang H. C., Tan Y. C., Chen C. H. A novel hysteresis model in unsaturated soil // *Hydrological Processes*, 2005, no. 19, pp. 1653–1665.
- Kool J. B., Parker J. C. Development and evaluation of closed-form expressions for hysteretic soil hydraulic properties // *Water Resources Research*, 1987, no. 23 (1), pp. 105–114.
- Kosugi K. Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention // *Water Resour. Res.*, 1994, no. 30, pp. 891–901.
- Kosugi K. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties // *Water Resour. Res.*, 1996, no. 32, pp. 2697–2703.
- Medvedev S., Topaj A., Badenko V., Terleev V. Medium-term analysis of agroecosystem sustainability under different land use practices by means of dynamic crop simulation // *IFIP Advances in Information and Communication Technology*, 2015, no. 448, pp. 252–261.
- Mualem Y. A catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils. Research Project 442. Technion, Israel Institute of Technology. Haifa, Israel, 1976. 100 p.
- Scott P. S., Farquhar G. J., Kouwen N. Hysteretic effects on net infiltration. Proceeding of National Conference on Advances in Infiltration, Publication 11-83. American Society of Agricultural Engineers. St. Joseph, Michigan, 1983. pp. 163–170.
- Terleev V., Mirschel W., Nikonorov A., Ginevsky R., Lazarev V., Topaj A., Moiseev K., Layshev K., Arkhipov M., Melnichuk A., Dunaieva I., Popovych V. Five models of hysteretic water-retention capacity and their comparison for sandy soil // *MATEC Web of Conferences*, 2018, no. 193, Article number 02036.
- Terleev V. V., Topazh A. G., Mirschel W. The improved estimation for the effective supply of productive moisture considering the hysteresis of soil water retention capacity // *Russian Meteorology and Hydrology*, 2015, no. 40 (4), pp. 278–285.
- Terleev V. V., Mirschel W., Badenko V. L., Guseva I. Yu. An Improved Mualem-Van Genuchten method and its verification using data on Beit Netofa clay // *Eurasian Soil Science*, 2017a, no. 50 (4), pp. 445–455.
- Terleev V., Ginevsky R., Lazarev V., Nikonorov A., Togo I., Topaj A., Moiseev K., Abakumov E., Melnichuk A., Dunaieva I. Predicting the scanning branches of hysteretic soil water-retention capacity with use of the method of mathematical modeling // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2017b, no. 90, Article number 012105.
- Van Genuchten M. Th. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1980, no. 44, pp. 892–989.
- Winitzki S. A handy approximation for the error function and its inverse. 2008. (in <https://sites.google.com/site/winitzki/sergei-winitzkis-files/erf-approx.pdf?attredirects=0>).