

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЧВЫ И ЕГО ВЕРИФИКАЦИЯ

В. В. Терлеев¹, Р. С. Гиневский¹, В. А. Лазарев¹, А. Г. Топаж², Е. А. Дунаева³

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29;

²ООО «Бюро Гиперборея», 193312, г. Санкт-Петербург, ул. Подвойского, 40-2;

³[Научно-исследовательский институт сельского хозяйства Крыма](#)

295543, г. Симферополь, ул. Киевская, 150

E-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru

Поступила в редакцию 05 марта 2020 г., принята к печати 28 мая 2020 г.

Для описания водоудерживающей способности и отношения гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги (относительной гидравлической проводимости почвы) используются три системы функций. В каждой системе применяется соответствующий набор параметров, которые являются общими для функций, образующих данную систему. Функции первой системы имеют формальные параметры и используются в методе Муалема-Ван Генухтена. Для параметров двух других систем предлагается физико-статистическая интерпретация, а их функции рассматриваются в качестве альтернативы функциям первой системы. Основное предназначение используемых систем функций заключается в прогнозировании относительной гидравлической проводимости с применением параметров, идентифицируемых путем точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности почвы. На примере илистой почвы «2001 Silt «Columbeia» из каталога Муалема сравниваются три используемые системы функций. Для этого по критерию Вильямса-Клута оценивается достоверность различий между погрешностями сравниваемых систем функций при точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности, а также при прогнозировании относительной гидравлической проводимости почвы. Определяется существенность влияния аддитивного параметра на погрешности второй и третьей систем функций. Результаты исследования свидетельствуют о преимуществах функций второй и третьей систем перед функциями первой системы, которые используются в методе Муалема-Ван Генухтена.

Ключевые слова: водоудерживающая способность, относительная гидравлическая проводимость, математическая модель, точечная аппроксимация опытных данных, прогнозирование, критерий Вильямса-Клута.

FUNCTIONAL DESCRIPTION OF HYDROPHYSICAL SOIL PROPERTIES AND ITS VERIFICATION

V. V. Terleev^{1,*}, R. S. Ginevsky¹, V. A. Lazarev¹, A. G. Topaj², E. A. Dunaieva³

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
Polytechnicheskaya, 29, St. Petersburg, 195251, Russia

²LLC «Bureau Hyperborea», 40-2, Podvoisky ul., St. Petersburg, 193312, Russia

³Federal State Budget Scientific Institution «Research Institute of Agriculture of Crimea»,

Kievskaya street, 150, Simferopol, 295543, Russia

*E-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru

Three systems of functions are used to describe the water-retention capacity and the ratio of soil hydraulic conductivity to moisture filtration coefficient (relative hydraulic conductivity of soil). Every system uses an appropriate set of parameters that are common to the functions that make up this system. The functions of the first system have formal parameters and are used in the Mualem-Van Genuchten method. A physical-statistical interpretation is proposed for the parameters of two other systems, and the functions of these systems are considered as an alternative to the functions of the first system. The main purpose of the systems used is to predict the relative hydraulic conductivity applying parameters identified by the point approximation of data on the soil water-retention capacity. On the example of soil «2001 Silt «Columbeia» from the Mualem catalog, the three systems of functions are compared. To do this, according to the Williams-Klout criterion, the reliability of the differences between the errors of the compared functions is estimated for the point approximation of data on water-retention capacity, as well as for predicting the relative hydraulic conductivity of the soil. The significance of the influence of the additive parameter on the errors of the second and third systems of functions is estimated. The results of the study indicate the advantages of the functions of the second and third systems over the functions that are used in the Mualem-Van Genuchten method.

Key words: water-retention capacity, relative hydraulic conductivity, mathematical model, point approximation of experimental data, forecasting, Williams-Klout criterion.

ВВЕДЕНИЕ

Для оценки насыщенности почвы водой, имеющей свойства жидкости, используется показатель эффективного влагонасыщения $S_e = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$; здесь $[\text{см}^3 \cdot \text{см}^{-3}]$ – объемная влажность; $\theta_s [\text{см}^3 \cdot \text{см}^{-3}]$ – объемная влажность насыщения; $\theta_r [\text{см}^3 \cdot \text{см}^{-3}]$ – объемная остаточная влажность почвы. К гидрофизическим свойствам почвы относятся ее водоудерживающая способность и гидравлическая проводимость. При описании данных свойств используются следующие характеристики: для водоудерживающей способности – зависимость эффективного влагонасыщения S_e от капиллярного давления (капиллярно-сорбционного потенциала) почвенной влаги ψ [см вод.ст.] (ψ имеет отрицательные значения в почвах, не насыщенных водой); для гидравлической проводимости – зависимость коэффициента влагопроводности k [см·сут⁻¹] от объемной влажности почвы.

Для решения ряда задач гидрофизики почвы требуется функциональное представление зависимостей $S_e(\psi)$ и $k(\theta)$. К числу таких задач относится расчет динамики почвенной влаги с использованием уравнения неразрывности потока воды в почвенном слое. Данное уравнение принадлежит к классу дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Применение произвольных эмпирических функций (например, – степенных полиномов), аппроксимирующих данные прямых измерений зависимостей $S_e(\psi)$ и $k(\theta)$, может привести к физически абсурдным результатам при определении переменных коэффициентов уравнения с использованием операции дифференцирования, поскольку указанная операция не является устойчивой по отношению к аппроксимациям. Поэтому исследования, направленные на разработку физически адекватных математических моделей, которые необходимы для определения коэффициентов уравнения неразрывности потока воды в почве и достижения достаточной точности расчета динамики почвенной влаги, являются весьма актуальными. Вместе с тем точность расчета динамики почвенной влаги определяется в том числе точностью прямых измерений зависимостей $S_e(\psi)$ и $k(\theta)$, результаты которых используются для параметрической идентификации моделей, описывающих гидрофизические свойства почвы. Такие измерения являются весьма трудоемкими. Поэтому разработка методов, которые позволяют уменьшить количество прямых измерений зависимостей $S_e(\psi)$ и $k(\theta)$, также представляется довольно актуальной.

К числу таких методов относятся методы, разработанные Ван Генухтенем (Van Genuchten, 1980) и Косуги (Kosugi, 1994, 1996). В основу данных методов положена формула Муалема (Mualem, 1976a). Они предназначены для оценки отношения гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги k_s [см·сут⁻¹] (относительной гидравлической проводимости почвы $k(\theta)/k_s$) с использованием функций, параметры которых могут быть идентифицированы путем точечной

аппроксимации данных о водоудерживающей способности почвы. Каждый из указанных методов обладает очевидными достоинствами: во-первых, применяемые функции, которые описывают зависимости $S_e(\psi)$ и $k(\theta)$, имеют соответствующий набор общих параметров; во-вторых, дифференцирование функции, описывающей зависимость $S_e(\psi)$, позволяет получить функцию (приведенной) дифференциальной влагоемкости почвы, которая графически изображается в виде реалистичной куполообразной кривой. В отношении практического применения метод, разработанный Ван Генухтенем, имеет определенное преимущество перед методом, разработанным Косуги, поскольку в первом методе для описания гидрофизических свойств почвы используются соотношения, которые принадлежат к классу элементарных функций, а во втором методе для этого используются специальные функции. Следует признать, что в настоящее время метод, разработанный Ван Генухтенем, является одним из самых широко известных и применяемых методов почвенно-гидрофизических расчетов в мире. Однако он не лишен недостатков, к числу которых относятся проблематичность интерпретации мультипликативного параметра и ограничение, наложенное на экспоненциальный параметр.

Целями проводимого авторами исследования являются представление гидрофизических свойств почвы в виде математических моделей и сравнение погрешностей данных моделей. Указанные цели достигаются посредством решения следующих задач:

- 1) описание зависимостей $S_e(\psi)$ и $k(\theta)$ в виде систем функций, имеющих соответствующие наборы общих параметров;
- 2) идентификация параметров для каждой системы функций при помощи метода точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности почвы из литературного источника (Mualem, 1976b) и оценка достоверности различий между погрешностями аппроксимации с применением критерия Вильямса-Клута (Кобзарь, 2006);
- 3) верификация функций относительной гидравлической проводимости каждой системы посредством прогнозирования значений указанных функций с использованием параметров, идентифицированных по данным о водоудерживающей способности почвы, оценка достоверности различий между погрешностями прогнозирования с применением критерия Вильямса-Клута и выбор лучшей физически обоснованной системы.

ОБЪЕКТЫ И МЕТОДЫ

К числу широко известных моделей водоудерживающей способности почвы относится модель, предложенная Бруксом и Кори (Brooks, Corey, 1964):

$$S_e = \begin{cases} (-\alpha\psi)^{-n}, & \psi < \psi_e; \\ 1, & \psi \geq \psi_e, \end{cases} \quad (1)$$

где $n > 0$ и $\alpha = -1/\psi_e$ [см вод.ст.⁻¹] – эмпирические параметры; ψ_e [см вод.ст.] – капиллярное давление почвенной влаги, при котором начинается «вход воздуха» в почву и вытеснение воды из изначально

влагонасыщенной почвы («давление барботирования»).

Очевидным достоинством модели (1) является весьма простая математическая формулировка. Однако она имеет два существенных недостатка: во-первых, кривая, которая графически изображает модель (1), не имеет S-образной (сигмоидальной) формы, характерной для многих почв; во-вторых, в точке $\psi = \psi_e$ существует разрыв функции (приведенной) дифференциальной влагоемкости почвы (типа «бесконечность – ноль»), вычисленной с использованием соотношения (1).

В настоящее время наиболее часто используется модель водоудерживающей способности почвы, предложенная Ван Генухтенем (Van Genuchten, 1980):

$$S_e = \begin{cases} (1 + (-\alpha\psi)^n)^{-(1-1/n)}, & \psi < 0; \\ 1, & \psi \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $n > 1$ и α [см вод.ст.⁻¹] – эмпирические параметры.

Модель (2) не имеет недостатков, характерных для модели (1). При больших значениях экспоненциального параметра n (в предельном переходе) соотношение (2) сводится к функции водоудерживающей способности почвы, предложенной Хаверкампом с соавт. (Haverkamp et al., 1977).

В работе (Van Genuchten, 1980) с использованием формулы Муалема (Mualem, 1976a) и модели (2) получена функция относительной гидравлической проводимости почвы:

$$\frac{k}{k_s} = \begin{cases} \sqrt{S_e} \left(1 - (1 - S_e^{1/(1-1/n)})^{(1-1/n)} \right)^2, & \theta < \theta_s; \\ 1, & \theta = \theta_s. \end{cases} \quad (3)$$

В соотношениях (2) и (3) используется общий параметр n . Совокупность соотношений (2) и (3) представляет собой метод Ван Генухтена (или Муалема-Ван Генухтена).

В работе (Терлеев и др., 2017) применяется нормально распределенная случайная величина $\ln((\psi - \psi_e)/(\psi_0 - \psi_e))$ с нулевым генеральным средним и стандартным отклонением σ для описания водоудерживающей способности почвы в виде соотношения:

$$S_e = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{n\sqrt{\pi}}{4} \ln(-\alpha(\psi - \psi_e)) \right), & \psi < \psi_e; \\ 1, & \psi \geq \psi_e, \end{cases} \quad (4)$$

где $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ – дополнительная функция ошибок; $n = 4/(\sigma\sqrt{2\pi})$; $\alpha = -1/(\psi_0 - \psi_e)$ [см вод.ст.⁻¹]; ψ_e [см вод.ст.] – давление «входа воздуха» («давление барботирования»); ψ_0 [см вод.ст.] – капиллярное давление почвенной влаги, при котором плотность распределения вероятностей по значениям применяемой случайной величины достигает максимума ($\psi_0 < \psi_e$).

Модель (4) также не имеет недостатков, характерных для модели (1). В частном случае при $\psi_e = 0$ соотношение (4) сводится к функции водоудерживающей способности почвы, предложенной Косуги (Kosugi, 1994).

В работе (Терлеев и др., 2017) с использованием формулы Муалема и модели (4) получена функция относительной гидравлической проводимости почвы:

$$\frac{k}{k_s} = \begin{cases} \sqrt{S_e} \left(\operatorname{erfc} \left(\operatorname{inverfc}(2S_e) + \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \right) \right)^2, & \theta < \theta_s; \\ 1, & \theta = \theta_s, \end{cases} \quad (5)$$

где $\operatorname{inverfc}(\operatorname{erfc}(x)) = x$.

В частном случае при $\psi_e = 0$ соотношение (5) сводится к модели, предложенной Косуги (Kosugi, 1996).

В работе (Терлеев и др., 2017) получена непрерывная аппроксимация соотношения (4) в классе элементарных функций с использованием упрощенной формулы Виницкого (Winitzki, 2008) в следующем виде:

$$S_e = \begin{cases} (1 + (-\alpha(\psi - \psi_e))^n)^{-1}, & \psi < \psi_e; \\ 1, & \psi \geq \psi_e. \end{cases} \quad (6)$$

Модель (6) также не имеет недостатков, характерных для модели (1). В частном случае при $\psi_e = 0$ соотношение (6) сводится к функции водоудерживающей способности почвы, предложенной Хаверкампом с соавт. (Haverkamp et al., 1977).

В работе (Терлеев и др., 2017) получена непрерывная аппроксимация соотношения (5) в классе элементарных функций с использованием упрощенной формулы Виницкого (Winitzki, 2008) в следующем виде:

$$\frac{k}{k_s} = \begin{cases} \sqrt{S_e} \left(1 - (1 - S_e^{-1}) \exp\left(\frac{8}{n\pi}\right) \right)^{-2}, & \theta < \theta_s; \\ 1, & \theta = \theta_s. \end{cases} \quad (7)$$

Соотношения (4)–(7) описывают гидрофизические функции почвы с параметрами, для которых предложена физико-статистическая интерпретация: $n = 4/(\sigma\sqrt{2\pi})$ и $\alpha = -1/(\psi_0 - \psi_e)$, где ψ_e – давление «входа воздуха» («давление барботирования»); ψ_0 – капиллярное давление почвенной влаги, при котором плотность распределения вероятностей по значениям нормально распределенной случайной величины $\ln((\psi - \psi_e)/(\psi_0 - \psi_e))$ с нулевым генеральным средним и стандартным отклонением σ достигает максимума ($\psi_0 < \psi_e$). Данные соотношения представляют собой альтернативу методу Ван Генухтена (или Муалема-Ван Генухтена).

Введем ряд обозначений для функций водоудерживающей способности (WRC – *water-retention capacity*), описываемых соотношениями (2), (4) и (6). Функцию (2) обозначим WRC-VG; функцию (4) для случая $\psi_e \neq 0$ – WRC-КТ, а для случая $\psi_e = 0$ – WRC-КТ₀; функцию (6) для случая $\psi_e \neq 0$ – WRC-НТ, а для случая $\psi_e = 0$ – WRC-НТ₀.

Введем ряд обозначений для функций относительной гидравлической проводимости почвы (RHC – *relative hydraulic conductivity*), описываемых соотношениями (3), (5) и (7). Функцию (3) обозначим RHC-MVG; функцию (5) для случая $\psi_e \neq 0$ – RHC-MKT, а для случая $\psi_e = 0$ – RHC-MKT₀; функцию (7) для случая $\psi_e \neq 0$ – RHC-MT, а для случая $\psi_e = 0$ – RHC-MT₀.

Поскольку перечисленные функции обычно используются попарно ($S_e(\psi)$ и $k(\theta)/k_s$), сгруппируем их для удобства следующим образом:

– система № 1 (WRC-VG и RHC-MVG);

– система № 2 (WRC-КТ и RHC-МКТ или WRC-КТ₀ и RHC-МКТ₀);

– система № 3 (WRC-НТ и RHC-МТ или WRC-НТ₀ и RHC-МТ₀).

Наиболее известной и широко применяемой является система № 1. Однако ей свойственны отмеченные выше недостатки: во-первых, проблематичность интерпретации мультипликативного параметра α ; во-вторых, ограничение, наложенное на экспоненциальный параметр, $n > 1$.

Рассмотрим первый недостаток системы № 1. В исследовании (Van Genuchten, 1980) утверждается, что при больших значениях экспоненциального параметра n величина, обратная мультипликативному параметру α , «становится идентичной давлению барботирования в модели Брукса и Кори». Очевидно, приведенное утверждение является причиной того, что в литературе нередко встречаются весьма сомнительные физические интерпретации мультипликативного параметра α модели (2), предложенной Ван Генухтеном. Действительно, под «давлением барботирования» по определению понимается такое давление почвенной влаги, при котором начинается «вход воздуха» при иссушении изначально влагонасыщенной почвы, когда еще выполняется равенство $S_e = 1$. Нетрудно увидеть, что в модели (1) Брукса и Кори для случая $\psi = \psi_e = -1/\alpha$ действительно выполняется равенство $S_e = 1$ (причем вне зависимости от значений экспоненциального параметра n). Однако в модели (2) Ван Генухтена для случая $\psi = -1/\alpha$ эффективное влагонасыщение не равно единице: $S_e = 2^{-(1-1/n)}$. Кроме того, в модели (2) Ван Генухтена для случая $\psi = -1/\alpha$ при повышении значений экспоненциального параметра n эффективное влагонасыщение стремится к $1/2$ — таким образом, при указанных условиях оно также не равно единице (как это свойственно модели (1) Брукса и Кори и как должно быть исходя из определения «давления барботирования»). Следовательно, смысл мультипликативного параметра модели (2), предложенной Ван Генухтеном, состоит в том, что для случая $\psi = -1/\alpha$ предельное значение эффективного влагонасыщения S_e (при n) равно $1/2$. Поэтому установить степень обоснованности утверждения о том, что при больших значениях экспоненциального параметра n величина, обратная мультипликативному параметру α в модели (2) Ван Генухтена, «становится идентичной давлению барботирования в модели Брукса и Кори», весьма проблематично. Таким образом, следует признать, что оба параметра (n и α) функций Ван Генухтена являются формальными.

Рассмотрим второй недостаток системы № 1. Что касается ограничения $n > 1$, то оно порождает проблему, которая заключается в следующем: даже в том случае, когда погрешность точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности оказывается достаточно низкой, погрешность прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы может оказаться весьма высокой. Ранее данная проблема была

выявлена при исследовании глинистой почвы Бейт Нетофа (Van Genuchten, 1980). Почва Бейт Нетофа предположительно имеет высокую дисперсию распределения пор по размерам, поэтому, возможно, экспоненциальный параметр принимает малое значение, близкое к единице, из-за чего погрешность прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы оказывается весьма высокой. В работе (Терлеев и др., 2017) предложено решение указанной проблемы на примере той же глинистой почвы Бейт Нетофа.

В исследовании (Van Genuchten, 1980) вполне очевидно изначальное намерение автора использовать модель водоудерживающей способности почвы, предложенную Хаверкампом с соавт. (Haverkamp et al., 1977), для вычисления относительной гидравлической проводимости почвы по формуле Муалема (следует напомнить, что указанная модель описывается соотношением (6) при $\psi_e = 0$). Данное намерение можно рассматривать в качестве исходной постановки задачи Ван Генухтена. Весьма вероятно, что Ван Генухтен осуществил преобразование модели, предложенной Хаверкампом с соавт., для преодоления затруднений вычислительного характера при интегрировании по формуле Муалема. Результатами преобразования являются гидрофизические функции почвы, образующие систему № 1, с отмеченными выше недостатками. Тем не менее следует признать, что, во-первых, соотношение (2) позволяет аппроксимировать данные о водоудерживающей способности почвы с достаточно низкой погрешностью, во-вторых, при больших значениях экспоненциального параметра, когда соотношение (2) сводится к функции водоудерживающей способности почвы, предложенной Хаверкампом с соавт., метод Ван Генухтена действительно позволяет добиться достаточно низкой погрешности прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы. Этим объясняется весьма широкое применение данного метода в почвенно-гидрофизических расчетах. Однако даже при низкой погрешности аппроксимации измеренной зависимости $S_e(\psi)$ ограничение $n > 1$ порождает проблему, которая заключается в том, что при малых значениях экспоненциального параметра n погрешности прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы по методу Ван Генухтена могут оказаться весьма высокими. По мнению авторов, использование в почвенно-гидрофизических расчетах функций систем № 2 и № 3 позволяет решить указанные выше проблемы. Параметры систем № 2 и № 3 имеют физико-статистический смысл. Следует особо отметить, что система № 3 при $\psi_e = 0$ представляет собой математически корректное решение задачи Ван Генухтена в ее исходной постановке. Принципиальный результат в виде аддитивного параметра ψ_e , используемого в функциях систем № 2 и № 3, подтолкнул к его исследованию и поиску его более общей физической интерпретации. При моделировании гистерезиса водоудерживающей способности почвы параметр ψ_e учитывает: а) давление «входа воздуха» («давление барботирования») для ветвей иссушения ($\psi_e \leq 0$);

b) давление «входа воды» для ветвей увлажнения ($\psi_e \geq 0$).

В исследовании (Терлеев и др., 2017) было выявлено преимущество систем № 2 и № 3 перед системой № 1 в случае, когда значения экспоненциального параметра для систем № 2 и № 3 оказались меньше единицы (следует напомнить, что для системы № 1 указанное значение всегда больше единицы). Однако остаются открытыми следующие вопросы: 1) имеют ли преимущество системы № 2 и № 3 перед системой № 1 в случае, когда значения экспоненциального параметра для систем № 2 и № 3 оказываются больше единицы (так же, как и для системы № 1)?; 2) зависят ли погрешности точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности почвы, а также погрешности прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы от применения аддитивного параметра ψ_e в системах № 2 и № 3?

Для получения ответов на данные вопросы далее приводятся результаты сравнительного анализа трех систем гидрофизических функций в отношении погрешностей точечной аппроксимации опытных данных о водоудерживающей способности, а также погрешностей прогнозирования относительной гидравлической проводимости на примере илистой почвы «2001 Silt «Columelia» из каталога Муалема (Mualem, 1976b).

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Функциональное представление гидрофизических свойств почвы, описываемых зависимостями $S_e(\psi)$ и $k(\theta)$, имеет вид

соотношений (2)–(7), которые попарно сгруппированы в три системы функций с соответствующими наборами общих параметров. Идентификация параметров для каждой из трех систем осуществлена при помощи пакета программ (Гиневский и др., 2019) путем точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности почвы. При этом использовались функции WRC-VG, WRC-KT, WRC-KT₀, WRC-HT и WRC-HT₀. Значения параметров представлены в табл. 1.

В табл. 2a приведены погрешности точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности почвы. Достоверность различий между погрешностями оценена по критерию Вильямса-Клута (Кобзарь, 2006) (с доверительными вероятностями 0.95 и 0.975). Из данных табл. 2b следует, что существенных преимуществ какой-либо системы функций в отношении погрешностей аппроксимации данных о водоудерживающей способности почвы не выявлено. Только в двух из десяти случаев погрешности системы № 3 достоверно ниже, чем погрешности систем № 1 и № 2, причем ни в одном случае не выявлено существенного преимущества функции, в которой применяется аддитивный параметр (при $\psi_e \neq 0$), перед функцией, в которой указанный параметр отсутствует (при $\psi_e = 0$). Следовательно, в отношении точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности почвы все три системы функций имеют приблизительно равные (статистически неразличимые) погрешности, а вклад аддитивного параметра не является существенным.

Таблица 1. Значения параметров трех систем гидрофизических функций, полученные путем аппроксимации опытных данных о водоудерживающей способности почвы

Номер системы	Функции	θ_s , см ³ ·см ⁻³	θ_r , см ³ ·см ⁻³	ψ_e , см вод.ст.	α , см вод.ст. ⁻¹	n
1	WRC-VG	0.401	0.137	–	0.0155	1.768
2	WRC-KT	0.401	0.182	18.935	0.0078	1.882
	WRC-KT ₀	0.401	0.171	0	0.0087	1.448
3	WRC-HT	0.401	0.173	7.953	0.0082	1.675
	WRC-HT ₀	0.401	0.167	0	0.0085	1.482

Таблица 2а. Погрешности точечной аппроксимации опытных данных о водоудерживающей способности почвы

Корень квадратный из среднего арифметического квадратов отклонений результатов расчета от опытных данных (<i>RMSE</i> – <i>root mean square error</i>)				
Система № 1	Система № 2		Система № 3	
WRC-VG	WRC-KT	WRC-KT ₀	WRC-HT	WRC-HT ₀
0.0031	0.0015	0.0029	0.0012	0.0018

Таблица 2б. Достоверность различий между погрешностями точечной аппроксимации опытных данных о водоудерживающей способности почвы (по критерию Вильямса-Клута для доверительных вероятностей 0.95 и 0.975)

$y - (y_1 + y_2)/2 = \lambda(y_1 - y_2)$, где y – опытные данные											
y_1 : WRC-VG, y_2 : WRC-KT			y_1 : WRC-VG, y_2 : WRC-HT			y_1 : WRC-KT, y_2 : WRC-HT					
λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$			
-0.579	0.666	0.817	-0.655	0.590	0.723	-1.042	1.274	1.561			
y_1 и y_2 не различаются			y_2 точнее, чем y_1 (0.95) y_1 и y_2 не различаются (0.975)			y_1 и y_2 не различаются					
y_1 : WRC-VG, y_2 : WRC-KT ₀			y_1 : WRC-VG, y_2 : WRC-HT ₀			y_1 : WRC-KT ₀ , y_2 : WRC-HT ₀					
λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$			
-1.300	2.185	2.678	-1.567	0.673	0.825	-1.637	0.711	0.871			
y_1 и y_2 не различаются			y_2 точнее, чем y_1			y_2 точнее, чем y_1					
y_1 : WRC-KT, y_2 : WRC-KT ₀			y_1 : WRC-HT, y_2 : WRC-HT ₀			y_1 : WRC-KT, y_2 : WRC-HT ₀			y_1 : WRC-HT, y_2 : WRC-KT ₀		
λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$
0.531	2.708	3.319	0.500	2.747	3.366	0.238	1.752	2.147	0.601	1.821	2.232
y_1 и y_2 не различаются			y_1 и y_2 не различаются			y_1 и y_2 не различаются			y_1 и y_2 не различаются		

В левой части рис. 1 представлены опытные данные о водоудерживающей способности (круглые точки), в правой части рис. 1 — опытные данные об относительной гидравлической проводимости почвы (квадратные точки). Сплошными кривыми на рис. 1 показаны результаты идентификации путем точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности и прогнозирования относительной гидравлической проводимости исследуемой почвы. При этом для различных систем функций используются разные цвета: № 1 (функции WRC-VG и RHC-MVG) – красный, № 2 (функции WRC-KT и RHC-MKT) – синий, № 3 (функции WRC-HT и RHC-MT) – зеленый.

Верификация функций относительной гидравлической проводимости почвы осуществлена при помощи пакета программ (Гиневский и др., 2019) путем прогнозирования значений функций RHC-MVG, RHC-MKT, RHC-MKT₀, RHC-MT и RHC-MT₀. При этом использованы параметры, идентифицированные по данным о водоудерживающей способности почвы. В табл. 3а приведены погрешности прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы. Достоверность различий между погрешностями оценена по критерию Вильямса-Клута (Кобзарь, 2006)

(с доверительными вероятностями 0.95 и 0.975). Из табл. 3б видно, что система функций № 1 имеет достоверно более высокую погрешность прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы по сравнению с системами № 2 и № 3, причем как в случае, когда в функциях применяется аддитивный параметр ($\psi_e \neq 0$), так и в случае, когда указанный параметр отсутствует ($\psi_e = 0$). Данные табл. 3б свидетельствуют, что при $\psi_e = 0$ погрешность системы № 2 достоверно выше погрешности системы № 3, но при $\psi_e \neq 0$ различие между погрешностями систем № 2 и № 3 не является существенным. Вместе с тем при сравнении погрешностей систем № 2 и № 3 выявлено достоверное преимущество функций, в которых применяется аддитивный параметр (при $\psi_e \neq 0$), перед функциями, в которых данный параметр отсутствует (при $\psi_e = 0$). Отсюда следует, что при прогнозировании относительной гидравлической проводимости почвы погрешность системы № 1 достоверно выше погрешностей систем № 2 и № 3, а использование аддитивного параметра существенно уменьшает погрешности прогнозирования.

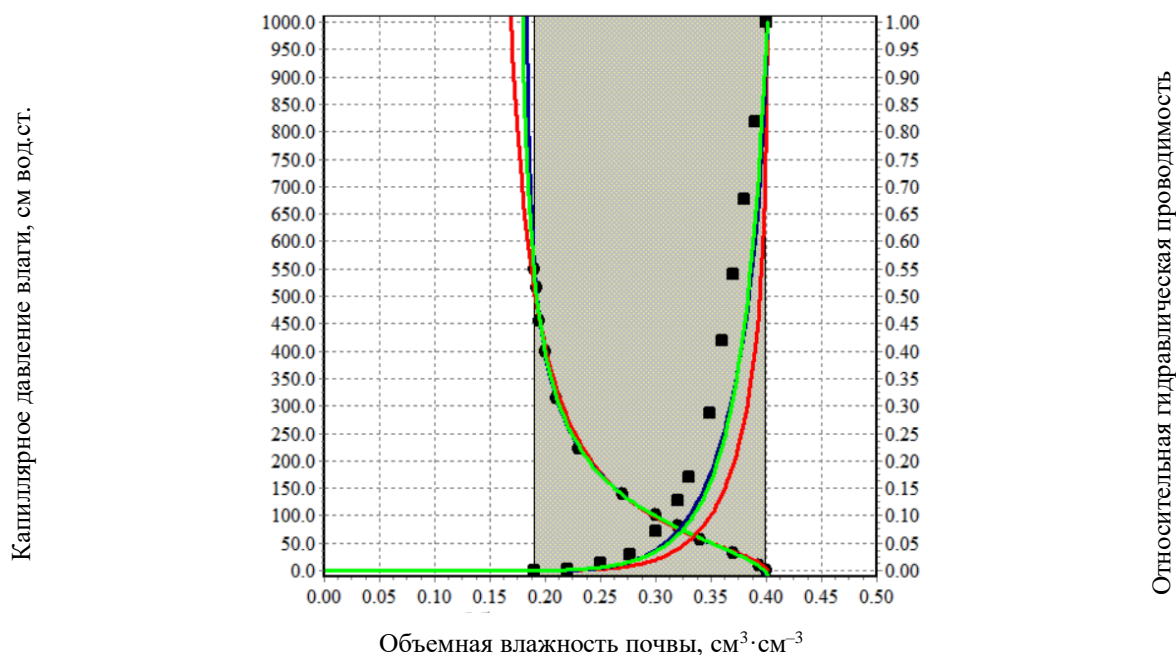


Рис. 1. Сравнение результатов моделирования с опытными данными для почвы «2001 Silt «Columela» (пояснения в тексте)

Таблица 3а. Погрешности прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы

Корень квадратный из среднего арифметического квадратов отклонений результатов расчета от опытных данных (*RMSE – root mean square error*)

Система № 1	Система № 2		Система № 3	
RHC-MVG	RHC-MKT	RHC-MKT ₀	RHC-MT	RHC-MT ₀
0.2240	0.1278	0.1849	0.1253	0.1509

Таблица 3б. Достоверность различий между погрешностями прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы (по критерию Вильямса-Клута для доверительных вероятностей 0.95 и 0.975).

$$y - (y_1 + y_2)/2 = \lambda(y_1 - y_2), \text{ где } y - \text{опытные данные}$$

$y_1: \text{RHC-MVG}, y_2: \text{RHC-MKT}$			$y_1: \text{RHC-MVG}, y_2: \text{RHC-MT}$			$y_1: \text{RHC-MKT}, y_2: \text{RHC-MT}$					
λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$			
-1.600	0.350	0.429	-1.204	0.510	0.625	-0.444	3.983	4.882			
y_2 точнее, чем y_1			y_2 точнее, чем y_1			y_1 и y_2 не различаются					
$y_1: \text{RHC-MVG}, y_2: \text{RHC-MKT}_0$			$y_1: \text{RHC-MVG}, y_2: \text{RHC-MT}_0$			$y_1: \text{RHC-MKT}_0, y_2: \text{RHC-MT}_0$					
λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$			
-2.659	1.775	2.175	-1.283	0.870	1.066	-2.305	1.756	2.152			
y_2 точнее, чем y_1			y_2 точнее, чем y_1			y_2 точнее, чем y_1					
$y_1: \text{RHC-MKT}, y_2: \text{RHC-MKT}_0$			$y_1: \text{RHC-MT}, y_2: \text{RHC-MT}_0$			$y_1: \text{RHC-MKT}, y_2: \text{RHC-MT}_0$			$y_1: \text{RHC-MT}, y_2: \text{RHC-MKT}_0$		
λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$	λ	$\lambda_{0.95}$	$\lambda_{0.975}$
2.765	0.207	0.254	5.311	0.380	0.466	2.649	2.077	2.545	1.966	0.700	0.858
y_1 точнее, чем y_2			y_1 точнее, чем y_2			y_1 точнее, чем y_2			y_1 точнее, чем y_2		

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлено описание зависимостей $S_e(\psi)$ и $k(\theta)$ в виде трех систем функций. В каждой системе используется соответствующий набор общих параметров. Проведена идентификация параметров каждой системы при помощи метода точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности илистой почвы «2001 Silt «Columéia» из каталога Муалема (Mualem, 1976b). Оценена достоверность различий между погрешностями аппроксимации с применением критерия Вильямса-Клута (Кобзарь, 2006). Проведена верификация функций относительной гидравлической проводимости почвы путем прогнозирования значений указанных функций с использованием параметров, идентифицированных по данным о водоудерживающей способности исследуемой почвы. Оценена достоверность различий между погрешностями прогнозирования с применением критерия Вильямса-Клута. Полученные авторами результаты позволяют сделать следующие выводы:

1) погрешности точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности почвы для всех трех систем не являются достоверно различимыми;

2) применение аддитивного параметра ψ_e существенно не влияет на погрешность точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности почвы;

3) несмотря на то, что для всех трех систем погрешности точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности не являются статистически различимыми, система № 1 (метод Муалема-Ван Генухтена) имеет достоверно более высокую погрешность прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы по сравнению с системами № 2 и № 3 (причем при значениях экспоненциального параметра, превышающих единицу, во всех сравниваемых системах);

4) применение аддитивного параметра ψ_e приводит к существенному уменьшению погрешности прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы;

5) система № 3 (при $\psi_e = 0$) представляет собой решение задачи прогнозирования относительной гидравлической проводимости (7) с применением параметров, идентифицированных по данным о водоудерживающей способности почвы, и использованием функции (6), предложенной Хаверкампом с соавт. (Haverkamp et al., 1977), т. е. является математически корректным решением задачи Ван Генухтена (Van Genuchten, 1980) в ее исходной постановке;

6) система № 3, представляющая собой по существу аппроксимацию системы № 2 в классе элементарных функций, достоверно не уступает системе № 2 ни в отношении погрешности точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности, ни в отношении погрешности прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы;

7) система № 3 имеет достоверно более низкую погрешность прогнозирования относительной гидравлической проводимости почвы по сравнению с системой № 1 (методом Муалема-Ван Генухтена);

8) достоинства системы № 3 позволяют рекомендовать функции (6) и (7) для широкого применения при моделировании гидрофизических свойств почвы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-04-00939-а, 19-016-00148-а.

Список литературы

- Гиневский Р.С., Терлеев В.В., Топаж А.Г., Лазарев В.А. SOILHYDROPHYSICS-V.1.0. 2019. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019667106, 19.12.2019. Заявка № 2019662561 от 12.10.2019.
- Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: Изд. Физматлит, 2006. 816 с.
- Терлеев В.В., Мишель В., Баденко В.Л., Гусева И.Ю. Усовершенствованный метод Муалема-Ван Генухтена и его верификация на примере глинистой почвы Бейт Нетофа // Почвоведение. 2017а. № 4. С. 457–467. DOI: 10.1134/S1064229317040135
- Brooks R.H., Corey A.T. Hydraulic Properties of Porous Media // Hydrology Papers 3, Colorado State University, Fort Collins., 1964. 27 p.
- Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration // Soil Sci. Soc. Am. J., 1977, no. 41, pp. 285–294.
- Kosugi K. Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention // Water Resour. Res., 1994, no. 30, pp. 891–901.
- Kosugi K. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties // Water Resour. Res., 1996, no. 32, pp. 2697–2703.
- Mualem Y. A new model for predicting hydraulic conductivity of unsaturated porous media // Water Resour. Res., 1976а, no. 12, pp. 513–522.
- Mualem Y. A catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils // Research Project 442. Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel., 1976b. 100 p.
- Van Genuchten M.Th. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J., 1980, no. 44, pp. 892–989.
- Winitzki S. A handy approximation for the error function and its inverse. 2008. (in <https://sites.google.com/site/winitzki/sergei-winitzkis-files/erf-approx.pdf?attredirects=0>)

References

- Ginevskiy R.S., Terleev V.V., Topazh A.G., Lazarev V.A. SOILHYDROPHYSICS-V.1.0. Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya EVM RU 2019667106, 19.12.2019. Zayavka № 2019662561 ot 12.10.2019 (Rus) [Certificate of registration of a computer program RU 2019667106, 12.10.2019. Application No. 2019662561 dated 12/10/2019].
- Kobzar A.I. Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov [Applied Mathematical Statistics. For engineers and scientists]. Moscow: Fizmatlit, 2006. 816 p.
- Terleev V.V., Mirschel W., Badenko V.L., Guseva I.Yu. An Improved Mualem-Van Genuchten method and its verification using data on Beit Netofa clay // Eurasian Soil Science, 2017а, v. 50, no. 4, pp. 445–455. DOI: 10.1134/S1064229317040135
- Brooks R.H., Corey A.T. Hydraulic Properties of Porous Media // Hydrology Papers 3, Colorado State University, Fort Collins., 1964. 27 p.
- Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration // Soil Sci. Soc. Am. J., 1977, no. 41, pp. 285–294.
- Kosugi K. Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention // Water Resour. Res., 1994, no. 30, pp. 891–901.
- Kosugi K. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties // Water Resour. Res., 1996, no. 32, pp. 2697–2703.
- Mualem Y. A new model for predicting hydraulic conductivity of unsaturated porous media // Water Resour. Res., 1976а, no. 12, pp. 513–522.
- Mualem Y. A catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils // Research Project 442. Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel., 1976b. 100 p.
- Van Genuchten M.Th. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J., 1980, no. 44, pp. 892–989.
- Winitzki S. A handy approximation for the error function and its inverse. 2008. (in <https://sites.google.com/site/winitzki/sergei-winitzkis-files/erf-approx.pdf?attredirects=0>)