

СОРОК ЛЕТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВАН ГЕНУХТЕНА И ПРЕДЛОЖЕНИЕ ИХ ЗАМЕНЫ ФИЗИЧЕСКИ АДЕКВАТНЫМИ АНАЛОГАМИ

В. В. Терлеев^{1,2*}, В. А. Лазарев¹, Р. С. Гиневский¹, В. В. Гарманов², Е. А. Дунаева³

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29;

²Санкт-Петербургский государственный аграрный университет, 196601, Санкт-Петербург, г. Пушкин, Петербургское шоссе, 2;

³Научно-исследовательский институт сельского хозяйства Крыма, 295543, г. Симферополь, Киевская ул., 150

*E-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru

Поступила в редакцию 01.05.2023, принята к печати 31.08.2023

Актуальность исследования определяется востребованностью математических моделей гидрофизических свойств почвы (дисперсного грунта). Проблема исследования заключается в наличии пробелов в части обоснования водоудерживающей способности и гидравлической проводимости почвы (дисперсного грунта) в рамках фундаментальных физических концепций. Цель исследования – выявление и обоснование закономерностей межфазных абиотических взаимодействий в почве (дисперсном грунте) с участием воды в жидком агрегатном состоянии. Предложено физическое обоснование данных взаимодействий, опирающееся на представление о строении пространства капиллярно-пористой среды, а также о силах поверхностного натяжения воды и сорбционного взаимодействия влаги с твердой фазой. На основе этого сформулированы пары гидравлических функций с общими параметрами. Данные функции сгруппированы в три системы. Первая система образована функциями, которые используются в рамках метода Муалема-Ван Генухтена. Вторая система представлена функциями, которые являются усовершенствованным аналогом моделей, применяемых в рамках метода Муалема-Косуги. Третья система образована усовершенствованным аналогом модели Хаверкампа с соавторами и оригинальной функцией гидравлической проводимости. Усовершенствование модели Косуги, а также модели Хаверкампа с соавторами достигнуто за счет включения в них дополнительного аддитивного параметра, учитывающего «давление барботирования». В рамках вычислительного эксперимента выполнен сравнительный анализ трех систем гидравлических функций с использованием данных о 22 объектах из каталога Муалема. Проведена оценка достоверности различий трех систем в отношении погрешностей моделирования с применением критерия Вильямса-Клута. Выявлены преимущества второй и третьей систем функций. Охарактеризованы недостатки функций Ван Генухтена.

Ключевые слова: почва (дисперсный грунт), водоудерживающая способность, относительная гидравлическая проводимость, математическая модель, точечная аппроксимация опытных данных, прогнозное оценивание, критерий Вильямса-Клута.

FORTY YEARS OF USING THE VAN GENUCHTEN EMPIRICAL FUNCTIONS AND A PROPOSAL TO REPLACE THEM WITH PHYSICALLY ADEQUATE ANALOGUES

V. V. Terleev^{1,2*}, V. A. Lazarev¹, R. S. Ginevskiy¹, V. V. Garmanov², E. A. Dunayeva³

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29, Polytechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia;

²St. Petersburg State Agrarian University, 2, Peterburgskoye highway, Pushkin, St. Petersburg, 196601, Russia;

³Research Institute of Agriculture of Crimea, 150, Kievskaya St., Simferopol, 295543, Russia

*E-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru

The relevance of the study is determined by the demand for mathematical models of soil hydrophysical properties. The research problem lies in the presence of gaps in substantiating the water-retention capacity and hydraulic conductivity of soil within the framework of fundamental physical concepts. The purpose of the study is to identify and substantiate the patterns of interfacial abiotic interactions in soil with the participation of water in a liquid state of aggregation. A physical substantiation of these interactions is proposed. It is based on the concept of space structure of a capillary-porous medium, as well as on the forces of water surface tension and the sorption interaction of moisture with the solid phase. On this basis, pairs of hydraulic functions with common parameters were formulated. These functions were grouped into three systems. The first system is formed by functions that are used within the framework of the Mualem-Van Genuchten method. The second system is represented by functions that are an improved analogue of the models used within the framework of the Mualem-Kosugi method. The third system is formed by an improved analogue of the Haverkamp et al. model and the original hydraulic conductivity function. The improvements of the Kosugi model, as well as the model of Haverkamp et al., were achieved by including an additional additive parameter that takes into account the «bubbling pressure». As part of a computational

experiment, a comparative analysis of the three systems of hydraulic functions was performed using data on 22 objects from the Mualem catalog. The reliability of the differences between the three systems in terms of modeling errors was assessed using the Williams-Kluth criterion. The advantages of the second and third systems of functions were revealed. The shortcomings of Van Genuchten functions were characterized.

Key words: soil, water-retention capacity, relative hydraulic conductivity, mathematical model, point approximation of experimental data, predictive estimation, Williams-Kluth criterion.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, свойство почвы или дисперсного грунта как капиллярно-пористой среды проводить воду в жидком агрегатном состоянии принято описывать в виде зависимости скорости влагопереноса k [см·сут⁻¹] от удельного содержания воды в данной среде (объемной влажности) θ [см³·см⁻³], а также от капиллярного давления (капиллярно-сорбционного потенциала) влаги ψ [см H₂O]. Данная зависимость называется функцией гидравлической проводимости. В условиях полного насыщения порового пространства среды водой как жидкостью скорость нисходящего влагопереноса под действием гравитации характеризуется коэффициентом фильтрации k_s [см·сут⁻¹]. Отношение функции гидравлической проводимости к коэффициенту фильтрации называется функцией относительной гидравлической проводимости (*relative hydraulic conductivity*, RHC). Свойство капиллярно-пористой среды удерживать воду в жидком агрегатном состоянии принято описывать в виде зависимости $\theta(\psi)$: данная зависимость называется функцией водоудерживающей способности (*water-retention capacity*, WRC). К настоящему времени не предложено исчерпывающего физически обоснованного математического описания RHC-функции и WRC-функции. Поэтому при формулировании зависимостей $k(\theta)$, $k(\psi)$ и $\theta(\psi)$, именуемых (как правило, в зарубежных изданиях) гидравлическими функциями, часто применяются эмпирические зависимости, которые следует использовать только для точечной аппроксимации данных прямых измерений. Из-за высокой трудоемкости таких измерений разработка способов оценивания значений гидравлических функций по косвенным данным имеет весьма важное практическое значение. К числу таких способов и относится метод Муалема-Ван Генухтена. Данный метод хорошо известен специалистам в области гидрофизики почв, грунтоведения и гидротехнического строительства. Он широко применяется для решения различных задач, например, при моделировании динамики почвенной влаги для прогнозирования урожайности сельскохозяйственных культур, расчете неустановившейся фильтрации в теле грунтовой плотины на этапе предпроектных исследований и др. Ценность метода заключается также в том, что он позволяет существенно уменьшить количество трудоемких прямых измерений, проводимых для определения гидрофизических свойств почвы или дисперсного грунта, а также, например, оценивать значения RHC-функции, параметры которой могут быть определены путем точечной аппроксимации WRC-данных. Востребованность метода подтверждается весьма высоким показателем цитирования статьи Ван Генухтена (Van Genuchten, 1980) в течение

длительного времени. Вместе с тем стоит отметить, что указанный метод не лишен недостатков.

Метод основан на формуле Муалема (Mualem, 1976a):

$$\frac{k}{k_s} = \sqrt{S_e} \left(\int_0^{S_e} \frac{dy}{\psi(y)} / \int_0^1 \frac{dy}{\psi(y)} \right)^2, \quad (1)$$

где $S_e = (\theta - \theta_R) / (\theta_S - \theta_R)$ – эффективное влагонасыщение (относительная объемная влажность) капиллярно-пористой среды; θ_S [см³·см⁻³] – объемная влажность при полном насыщении среды водой как жидкостью; θ_R [см³·см⁻³] – объемная остаточная влажность, соответствующая минимальному удельному объему воды как жидкости в поровом пространстве.

Для аналитического вычисления по формуле (1) Ван Генухтен использовал WRC-функцию, которая представлена в табл. 1 и имеет обозначение WRC-VG (система № 1). Ван Генухтен имел очевидное намерение выполнить вычисления по формуле (1) с использованием функции WRC-VG при $m = 1$, когда она сводится к функции предшественников, например к модели, предложенной Хаверкампом с соавторами (Haverkamp et al., 1977). Однако в таком случае аналитическое вычисление по формуле (1) оказывается затруднительным. Для преодоления затруднений Ван Генухтен применил соотношение $m = 1 - 1/n$ (с ограничением $n > 1$) в предложенной им функции WRC-VG и получил по формуле (1) широко известное аналитическое решение, которое представлено в табл. 1 и имеет обозначение RHC-MVG (система № 1).

Актуальность исследования, проводимого авторами данной статьи, заключается в необходимости разработки метода, который являлся бы более эффективным по сравнению с методом Муалема-Ван Генухтена.

Предмет исследования – закономерности, характерные для гидрофизических свойств почвы (дисперсного грунта).

Научной проблемой является отсутствие исчерпывающего теоретического обоснования гидрофизических свойств почвы (дисперсного грунта) как капиллярно-пористой среды.

Цель исследования заключается в восполнении пробелов в знаниях о закономерностях, которым подчиняются такие свойства капиллярно-пористой среды, как водоудерживающая способность и гидравлическая проводимость.

Указанная цель достигнута посредством решения следующих задач:

1) теоретическое обоснование закономерностей, которым подчиняются гидрофизические свойства почвы (дисперсного грунта) как капиллярно-пористой среды, в рамках фундаментальных представлений об абиотических

межфазных взаимодействиях в данной среде с участием воды;

2) формулирование теоретически обоснованных закономерностей в виде системы математических функциональных зависимостей с общими параметрами, допускающими физическую (физико-статистическую) интерпретацию;

3) верификация сформулированных зависимостей в рамках вычислительного эксперимента с использованием независимых данных из литературных источников;

4) сравнение погрешностей RMSE (корень квадратный из суммы квадратов отклонения результатов расчета от опытных данных) предложенных гидравлических функций с погрешностями функций, используемых в рамках метода Муалема-Ван Генухтена, на основе критерия Вильямса-Клута (Кобзарь, 2006; Terleev et al., 2019).

МЕТОД И ОБЪЕКТЫ

В соответствии с принятой в настоящее время физической парадигмой, межфазные абиотические взаимодействия в почве (дисперсном грунте) с участием воды обусловлены силами капиллярно-сорбционной природы. Капиллярная составляющая таких сил представляет собой взаимодействие молекул воды на границе раздела жидкой, газообразной и твердой фаз почвы (дисперсного грунта), которое проявляется как поверхностное натяжение влаги. Сорбционная компонента таких сил обусловлена преимущественно ван-дер-ваальсовыми взаимодействиями молекул воды на границе раздела жидкой и твердой фаз. Капиллярно-сорбционным взаимодействием воды с абиотическими фазами почвы (дисперсного грунта) и определяется водоудерживающая способность.

Следует напомнить, что под капиллярным давлением влаги понимается разность между абсолютным давлением атмосферы над поверхностью капилляра (границы раздела газообразной и жидкой фаз) и абсолютным давлением под ней. Под плоской поверхностью воды капиллярное давление равно нулю. Под вогнутой поверхностью воды данная величина принимает отрицательные значения, а под выпуклой поверхностью — положительные. Как известно, степень вогнутости или выпуклости такой поверхности в заданной точке характеризуется средней кривизной поверхности в ней. В свою очередь (по закону Лапласа), капиллярное давление влаги прямо пропорционально средней кривизне границы раздела газообразной и жидкой фаз в капилляре (коэффициент пропорциональности, как известно, называется коэффициентом поверхностного натяжения воды).

Перейдем непосредственно к построению функции (ψ). Известно, что при увлажнении изначально абсолютно сухой почвы (сухого дисперсного грунта) как капиллярно-пористой среды сначала образуется пленочная влага, по физическим свойствам отличающаяся от воды в широком сосуде, а затем происходит заполнение влагой капиллярных пор самого малого размера, в которых средняя кривизна границы раздела газообразной и жидкой фаз достигает

наибольших значений (в таких порах вода уже имеет свойства жидкости). При поступлении новых порций влаги в почву (дисперсный грунт) происходит постепенное заполнение пор все более крупного размера, в которых средняя кривизна границы раздела газообразной и жидкой фаз начинает принимать все меньшие и меньшие значения. Наконец, при полном влагонасыщении средняя кривизна границы раздела газообразной и жидкой фаз принимает нулевое значение (плоская поверхность мениска влаги). В задачах прикладной агрофизики наибольший интерес представляет диапазон капиллярной влаги, поскольку такая влага относится к категории легкодоступной для растений почвенной (почвенно-грунтовой) влаги.

Выдвинем нетривиальное предположение о том, что поровое пространство почвы (дисперсного грунта) является топологически сомкнутым в гидравлическом отношении. Тогда эффективное влагонасыщение S_e можно принять в качестве меры объективной возможности присутствия воды в жидком агрегатном состоянии в заданной точке порового пространства, т.е. эффективное влагонасыщение тождественно равно вероятности принадлежности поровой влаги к жидкой фазе, имеющей соответствующую среднюю кривизну границы раздела газообразной и жидкой фаз. Определенную таким образом вероятность далее также будем обозначать через S_e . Перейдем к поиску распределения вероятностей по значениям случайной величины, связанной со средней кривизной границы раздела газообразной и жидкой фаз почвы (дисперсного грунта), а также с капиллярным давлением влаги. При выборе модели случайной величины следует учитывать, что поровое пространство представляет собой совокупность промежутков (полостей) между элементарными частицами (и, возможно, агрегатами) твердой фазы самых различных размеров, формы и минералогического состава, которые по разным признакам теоретически могут быть сгруппированы в большое количество классов. Каждому такому классу соответствует совокупность пор, которую описывает то или иное распределение вероятностей по значениям той или иной случайной величины. Разумеется, такое распределение может существенно отличаться от нормального распределения. Однако, согласно центральной предельной теореме Ляпунова, сумма случайных величин с различными распределениями в предельном переходе стремится к нормальной случайной величине. Опираясь на положения данной теоремы, выдвинем гипотезу о том, что распределение вероятностей состояния влаги в жидкой фазе в заданной точке порового пространства по значениям случайной величины, связанной с капиллярным давлением влаги, подчиняется нормальному закону $N(0, \sigma^2)$:

$$S_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{\sigma \sqrt{2}} \right), \quad (2)$$

где дополнительная функция ошибок; $x = -\ln((\psi - \psi_e)/(\psi_0 - \psi_e))$ — нормальная случайная величина с нулевым генеральным средним и стандартным отклонением σ ; ψ_e [см H_2O],

ψ_0 [см H₂O] – параметры, которые допускают физико-статистическую интерпретацию (Терлеев и др., 2017, 2021).

Опираясь на предположение о топологической сомкнутости порового пространства почвы (дисперсного грунта) в отношении влагонасыщения, принимая во внимание тождественное равенство эффективного влагонасыщения и интегрального распределения вероятностей по значениям указанной выше случайной величины $x = -\ln((\psi - \psi_e)/(\psi_0 - \psi_e))$ и выдвигая (на основе центральной предельной теоремы Ляпунова) гипотезу о нормальности данной величины, получаем функцию, которая представлена в табл. 1 и имеет обозначение WRC-KT (система № 2). Попутно следует отметить тождественное равенство приведенной дифференциальной влагоемкости капиллярно-пористой среды и плотности рассматриваемого статистического распределения. Аналитическое вычисление по формуле Муалема (1) с использованием WRC-KT приводит к решению в виде другой гидравлической функции, которая представлена в табл. 1 и имеет обозначение RHC-MKT (система № 2); для соотношений, образующих систему № 2, предложены непрерывные аппроксимации в классе элементарных функций, которые представлены в табл. 1 и имеют соответствующие обозначения WRC-HT и RHC-MT (система № 2) (Терлеев и др., 2017, 2021).

Стоит обратить внимание, что Косуги (Kosugi, 1994, 1996) предложил гидравлические функции, которые основаны на распределении вероятностей по значениям случайной величины $\ln((\psi - \psi_e)/(\psi_0 - \psi_e))$ в соответствии с нормальным законом $N(\sigma^2, \sigma^2)$. Вместе с тем, как отмечено выше, построение WRC-функции системы № 2 опирается на нормальный закон $N(0, \sigma^2)$. Несмотря на то, что Косуги использовал понятие «давление барботирования», или «давление входа воздуха» (в настоящем исследовании оно учитывается параметром ψ_e), которое соответствует радиусу наиболее крупной поры цилиндрической формы (в используемой авторами интерпретации – среднему радиусу кривизны границы раздела жидкой и газообразной фаз в наиболее крупных порах, при котором воздух начинает поступать в изначально насыщенное влагой поровое пространство), в окончательной формулировке WRC-функции Косуги параметр «давление входа воздуха» отсутствует (Nasta et al., 2013). В связи с этим систему № 2 можно рассматривать в качестве более общего решения задачи, поставленной Косуги.

Интересно отметить также то, что в частном случае при $\psi_e = 0$ функция WRC-HT системы № 3 трансформируется к функции, предложенной Хаверкампом с соавторами (Haverkamp et al., 1977).

Охарактеризуем обозначения, используемые в табл. 1. Для системы № 1: α [см H₂O⁻¹], n и $m = 1 -$

$1/n$ – эмпирические параметры ($n > 1$). Для системы № 2 и системы № 3: $erfc(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ – дополнительная функция ошибок; $inverfc(x)$ – обратная для $erfc(x)$ функция; $\alpha = -1/(\psi_0 - \psi_e)$ [см H₂O⁻¹]; $n = 4/(\sigma\sqrt{2\pi})$, σ – стандартное отклонение нормальной случайной величины $x = -\ln((\psi - \psi_e)/(\psi_0 - \psi_e))$ с нулевым генеральным средним; ψ_e [см H₂O] – «давление входа воздуха» или «давление входа воды» (в том случае, если ставится задача учета гистерезиса, для ветвей иссушения $\psi_e = \psi_{e,d} \leq 0$, для ветвей увлажнения $\psi_e = \psi_{e,w} \geq \psi_{e,d}$, причем $\psi_{e,w}$ может принимать даже положительные значения); ψ_0 [см H₂O] – капиллярное давление влаги, при котором плотность распределения вероятностей по значениям нормальной случайной величины x достигает максимума ($\psi_0 < \psi_e$).

Для верификации и сравнения представленных в табл. 1 гидравлических функций почвы (дисперсного грунта) в исследовании использованы данные из широко известного источника – каталога Муалема (Mualem, 1976b). В нем приведены данные прямых измерений водоудерживающей способности и гидравлической проводимости почв и дисперсных грунтов различного генезиса и гранулометрического состава. Для оценки параметров функций и сравнения погрешностей функций, представленных в табл. 1, используется компьютерная программа (Гиневский и др., 2019).

На рис. 1 приведен треугольник Ферре, где точками обозначены 22 объекта исследования (почвы и дисперсные грунты) из каталога Муалема. Данные о водоудерживающей способности объектов использованы для идентификации (настройки) параметров методом точечной аппроксимации (ψ), а данные об относительной гидравлической проводимости — для сравнения результатов прогностических оценок с результатами натурных измерений с использованием гидравлических функций, представленных в табл. 1. Из рис. 1 видно, что выборка разновидностей объектов исследования представлена 7 из 12 классов почв и дисперсных грунтов по гранулометрическому составу (классификация USDA), при этом представлены «границные» классы. Таким образом, выборка является достаточно репрезентативной. Стоит отметить, что каталог Муалема содержит в себе данные о более чем 22 объектах, в том числе о гистерезисе гидрофизических свойств почв и дисперсных грунтов. Однако данные о гистерезисе авторы намерены использовать в последующих исследованиях. Тем не менее в настоящей статье также рассматриваются 4 из 5 почв, данные о которых Ван Генухтен применил для прогностических оценок значений функции RHC-VG (Van Genuchten, 1980).

Таблица 1. Гидравлические функции почвы (дисперсного грунта)

Номер системы	Обозначение функций	Математическое описание функций
1	WRC-VG	$S_e = \begin{cases} (1 + (-\alpha\psi)^n)^{-m}, & \psi < 0; \\ 1, & \psi \geq 0 \end{cases}$
	RHC-MVG	$\frac{k}{k_s} = \begin{cases} \sqrt{S_e} \left(1 - (1 - S_e^{1/m})^m \right)^2, & R\theta\theta_S; \\ 1, & \theta = \theta_S \end{cases}$
2	WRC-KT	$S_e = \begin{cases} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{n\sqrt{\pi}}{4} \ln(-\alpha(\psi - \psi_e))\right)}{2}, & \psi < \psi_e; \\ 1, & \psi \geq \psi_e \end{cases}$
	RHC-MKT	$\frac{k}{k_s} = \begin{cases} \frac{\sqrt{S_e}}{4} \left(\operatorname{erfc}\left(\operatorname{inverfc}(2S_e) + \frac{2}{n\sqrt{\pi}}\right) \right)^2, & R\theta\theta_S; \\ 1, & \theta = \theta_S \end{cases}$
3	WRC-HT	$S_e = \begin{cases} (1 + (-\alpha(\psi - \psi_e))^n)^{-1}, & \psi < \psi_e; \\ 1, & \psi \geq \psi_e \end{cases}$
	RHC-MT	$\frac{k}{k_s} = \begin{cases} \sqrt{S_e} \left(1 - (1 - S_e^{-1}) \exp\left(\frac{8}{n\pi}\right) \right)^{-2}, & R\theta\theta_S; \\ 1, & \theta = \theta_S \end{cases}$

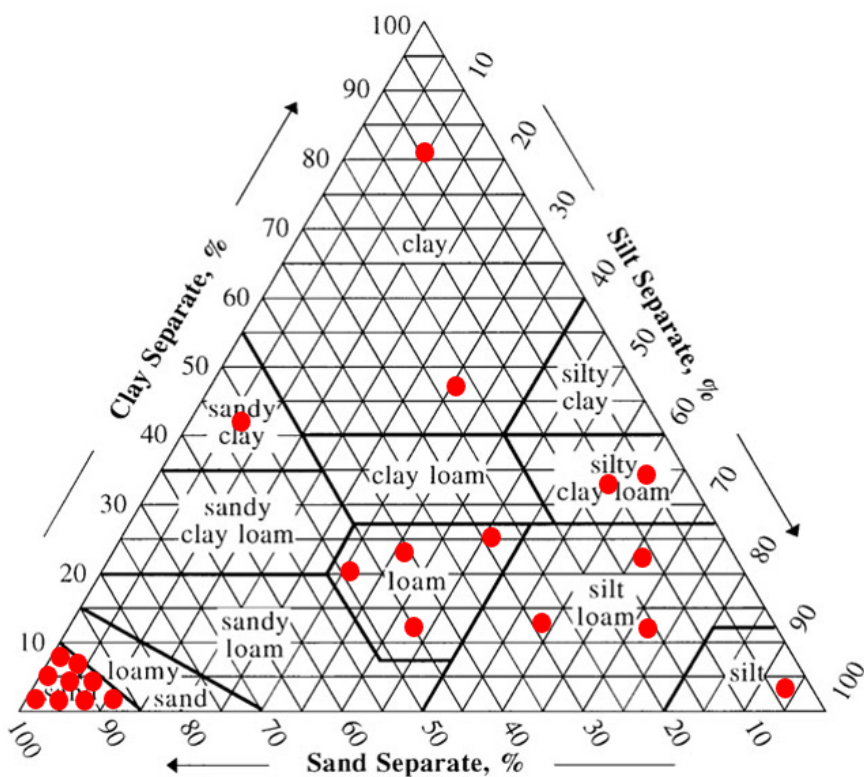


Рис. 1. Треугольник Ферре: точками обозначены 22 объекта исследования из каталога Муалема.

РЕЗУЛЬТАТЫ

В табл. 2 приведены результаты идентификации параметров гидравлических функций, представленных

в табл. 1, методом точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности 22 объектов исследования.

Таблица 2. Параметры гидравлических функций для 22 объектов исследования

1	2	3	4	5	6	7
Номер в каталоге Муалема, название объекта исследования, коэффициент фильтрации	Номер системы	Параметры гидравлических функций				
		θ_s , см ³ ·см ⁻³	θ_r , см ³ ·см ⁻³	ψ_e , см H ₂ O	α , см H ₂ O ⁻¹	n
1006 «Beit Netofa clay», $k_s = 9.5 \times 10^{-7}$ см/с	1	0.446	0	–	0.0015	1.17
	2	0.459	0.228	0.0	0.0004	0.835
	3	0.465	0.222	0.0	0.0004	0.803
2001 «Silt "Columbeia» $k_s = 5.83 \times 10^{-5}$ см/с	1	0.401	0.137	–	0.0155	1.768
	2	0.401	0.182	18.94	0.0078	1.882
	3	0.401	0.173	7.95	0.0082	1.675
3001 «Weld silty clay loam» $k_s = 5.68 \times 10^{-4}$ см/с	1	0.470	0.162	–	0.0131	5.978
	2	0.470	0.167	0.0	0.0125	5.496
	3	0.470	0.165	0.0	0.0125	5.688
3002 «Amarillo silty clay loam» $k_s = 1.64 \times 10^{-2}$ см/с	1	0.455	0.129	–	0.0100	5.055
	2	0.455	0.138	0.0	0.0096	4.676
	3	0.455	0.133	0.0	0.0095	4.795
3102 «Yolo light clay» $k_s = 1.23 \times 10^{-5}$ см/с	1	0.495	0.209	–	0.0252	1.756
	2	0.495	0.238	0.0	0.0137	1.376
	3	0.495	0.236	0.0	0.0136	1.419
3304 «Touchet silt loam» $k_s = 2.51 \times 10^{-5}$ см/с	1	0.480	0.187	–	0.0101	6.266
	2	0.480	0.141	-70.41	0.0272	1.403
	3	0.480	0.130	-72.20	0.0272	1.304
3307 «Touchet silt loam G.E. 3» $k_s = 3.51 \times 10^{-3}$ см/с	1	0.469	0.190	–	0.0050	7.09
	2	0.470	0.192	-15.26	0.0053	5.89
	3	0.472	0.190	-16.19	0.0053	6.06
3310 «Silt loam G.E. 3» $k_s = 5.74 \times 10^{-5}$ см/с	1	0.396	0.131	–	0.0042	2.06
	2	0.395	0.134	7.98	0.0024	1.59
	3	0.398	0.133	6.69	0.0024	1.62
3402 «Gilat loam» $k_s = 2.0 \times 10^{-4}$ см/с	1	0.440	0.084	–	0.0168	2.439
	2	0.440	0.091	0.0	0.0122	2.093
	3	0.440	0.090	0.0	0.0122	2.146
3403 «Pachapa loam» $k_s = 2.0 \times 10^{-4}$ см/с	1	0.456	0.034	–	0.0064	1.889
	2	0.456	0.043	0.0	0.0033	1.445
	3	0.456	0.042	0.0	0.0033	1.494
3404 «Adelanto loam» $k_s = 4.5 \times 10^{-5}$ см/с	1	0.426	0.083	–	0.0040	1.481
	2	0.426	0.113	0.0	0.0012	1.000
	3	0.426	0.109	0.0	0.0012	1.012
3405 «Indio loam» $k_s = 3.9 \times 10^{-4}$ см/с	1	0.467	0.033	–	0.0060	1.814
	2	0.468	0.055	-45.26	0.0034	1.148
	3	0.472	0.052	-46.47	0.0034	1.156
3503 «Pachapa fine sandy clay» $k_s = 1.4 \times 10^{-4}$ см/с	1	0.334	0.062	–	0.0120	2.050
	2	0.334	0.071	0.0	0.0074	1.575
	3	0.334	0.070	0.0	0.0074	1.658
4109 «Botany sand fraction (150-300 mic)» $k_s = 1.86 \times 10^{-2}$ см/с	1	0.350	0.066	–	0.0231	28.20
	2	0.350	0.067	0.0	0.0231	26.63
	3	0.350	0.067	0.0	0.0231	27.95
4120 «Gilat-fine sand» $k_s = 0.81 \times 10^{-6}$ см/с	1	0.205	0.068	–	0.0047	1.512
	2	0.198	0.072	0.0	0.0011	0.895
	3	0.202	0.072	0.0	0.0012	0.896
4122 «Sinai sand» $k_s = 3.33 \times 10^{-3}$ см/с	1	0.270	0.014	–	0.0227	4.687
	2	0.270	0.014	0.0	0.0209	4.167
	3	0.270	0.014	0.0	0.0210	4.367
4130 «Hygiene sandstone» $k_s = 1.25 \times 10^{-3}$ см/с	1	0.250	0.153	–	0.0079	10.4
	2	0.250	0.154	-40.15	0.0115	6.89
	3	0.250	0.153	-40.85	0.0115	6.84
4131 «Berea sandstone» $k_s = 3.37 \times 10^{-3}$ см/с	1	0.207	0.069	–	0.0098	8.861
	2	0.206	0.070	-23	0.0123	6.603
	3	0.207	0.069	-23	0.0123	6.871
4133 «Fine sand (G.E.#13)» $k_s = 2.0 \times 10^{-2}$ см/с	1	0.360	0.068	–	0.0104	6.897
	2	0.360	0.072	0.0	0.0101	6.257
	3	0.360	0.071	-3.56	0.0104	6.359

1	2	3	4	5	6	7
4134 « <i>Volcanic sand</i> » $k_s = 7.7 \times 10^{-2} \text{см/с}$	1	0.365	0.073	–	0.0230	6.758
	2	0.365	0.075	–0.62	0.0226	6.065
	3	0.365	0.073	–8.38	0.0274	5.151
4135 « <i>Gravelly sand</i> G.E.9» $k_s = 2.78 \times 10^{-4} \text{см/с}$	1	0.321	0.080	–	0.0144	2.961
	2	0.321	0.084	0.0	0.0117	2.481
	3	0.322	0.082	0.0	0.0117	2.559
4136 « <i>Fine sand</i> G.E.2» $k_s = 2.27 \times 10^{-3} \text{см/с}$	1	0.326	0.062	–	0.0071	4.060
	2	0.325	0.066	0.0	0.0064	3.571
	3	0.327	0.064	0.0	0.0064	3.700

В табл. 3 приведены результаты сравнения 2006; Terleev et al., 2019) ($\lambda_{0.95}$ и $\lambda_{0.99}$) с погрешностей точечной аппроксимации данных о использовании WRC-функций, представленных в водоудерживающей способности 22 объектов табл. 1. исследования по критерию Вильямса-Клута (Кобзарь,

Таблица 3. Сравнение WRC-функций в отношении погрешности аппроксимации опытных данных о водоудерживающей способности 22 объектов исследования (по критерию Вильямса-Клута): указано наименьшее значение RMSE для «функции-лидера»; отмечены модели, статистически неотличимые от лидера.

Номер в каталоге Муалема и название объекта исследования	wrc-vg	wrc-kt	wrc-ht
1006 « <i>Beit Netofa clay</i> »	0.0089 – лидер	не отличается от лидера	не отличается от лидера
2001 « <i>Silt "Columbeia"</i> »	–	не отличается от лидера	0.0012 – лидер
3001 « <i>Weld silty clay loam</i> »	0.0132 – лидер	–	–
3002 « <i>Amarillo silty clay loam</i> »	не отличается от лидера	–	0.0062 – лидер
3102 « <i>Yolo light clay</i> »	0.0044 – лидер	–	–
3304 « <i>Touchet silt loam</i> »	–	0.0029 – лидер	не отличается от лидера
3307 « <i>Touchet silt loam</i> G.E. 3»	не отличается от лидера	0.0085 – лидер	не отличается от лидера
3310 « <i>Silt loam</i> G.E. 3»	0.0021 – лидер	не отличается от лидера	не отличается от лидера
3402 « <i>Gilat loam</i> »	0.0170 – лидер	–	не отличается от лидера
3403 « <i>Pachapa loam</i> »	0.0156 – лидер	–	–
3404 « <i>Adelanto loam</i> »	0.0294 – лидер	–	–
3405 « <i>Indio loam</i> »	0.0171 – лидер	не отличается от лидера	не отличается от лидера
3503 « <i>Pachapa fine sandy clay</i> »	0.0094 – лидер	не отличается от лидера	не отличается от лидера
4109 « <i>Botany sand fraction</i> (150-300 mic)»	не отличается от лидера	0.0124 – лидер	не отличается от лидера
4120 « <i>Gilat-fine sand</i> »	0.0054 – лидер	не отличается от лидера	не отличается от лидера
4122 « <i>Sinai sand</i> »	0.0188 – лидер	–	не отличается от лидера
4130 « <i>Hygiene sandstone</i> »	не отличается от лидера	не отличается от лидера	0.0025 – лидер
4131 « <i>Berea sandstone</i> »	не отличается от лидера	не отличается от лидера	0.0037 – лидер
4133 « <i>Fine sand</i> (G.E.#13)»	0.0038 – лидер	–	не отличается от лидера
4134 « <i>Volcanic sand</i> »	не отличается от лидера	не отличается от лидера	0.0088 – лидер
4135 « <i>Gravelly sand</i> G.E.9»	не отличается от лидера	–	0.0038 – лидер
4136 « <i>Fine sand</i> G.E.2»	0.0034 – лидер	–	не отличается от лидера

В табл. 3 лидером авторы называют гидравлическую функцию с наименьшей погрешностью RMSE без учета статистически неотличимых аналогов. После выявления такого лидера по критерию Вильямса-Клута определяется группа функций, статистически неотличимых от лидера. Из табл. 3 видно, что при точечной аппроксимации опытных данных о водоудерживающей способности функция WRC-VG имеет минимальное значение RMSE для 20 объектов (лидер 13 раз, не отличается от лидера 7 раз); при этом достоверность преимущества над функциями WRC-KT или WRC-HT подтверждена для 4 объектов. Функция WRC-KT имеет минимальное значение RMSE для 12 объектов (лидер 3 раза, не отличается от лидера 9 раз); при этом достоверность преимущества над функцией WRC-VG подтверждена для 2 объектов. Функция WRC-HT имеет минимальное значение RMSE для 18 объектов (лидер 6 раз, не отличается от лидера 12 раз); при этом достоверность преимущества над функцией WRC-VG подтверждена для 2 объектов. Таким образом, выявлено некоторое преимущество (достоверное только для 4 объектов из 22) функции WRC-VG в отношении точечной аппроксимации опытных данных о водоудерживающей способности

почвы. Следует отметить, что данный результат не может объективно свидетельствовать о безоговорочных преимуществах функции WRC-VG, поскольку для целей точечной аппроксимации опытных данных может быть использовано множество других эмпирических функций; при этом применение, например, степенного полинома заведомо приведет к еще более низкому значению RMSE. Иными словами, применение функций с эмпирическими параметрами нередко позволяет достаточно точно аппроксимировать опытные данные. Однако если такие функции используются для экстраполяции или прогностических оценок, то результат может оказаться весьма неточным. Ниже будет продемонстрировано, что это в полной мере относится к функции RHC-MVG.

В табл. 4 приведены результаты сравнения погрешностей прогностических оценок значений функции относительной гидравлической проводимости 22 объектов исследования по критерию Вильямса-Клута (Кобзарь, 2006; Terleev et al., 2019) ($\lambda_{0.95}$ и $\lambda_{0.99}$) с использованием RHC-функций, представленных в табл. 1.

Таблица 4. Сравнение RHC-функций в отношении погрешности прогнозирования значений функции относительной гидравлической проводимости 22 объектов исследования (по критерию Вильямса-Клута): указано наименьшее значение RMSE для «функции-лидера»; отмечены модели, статистически неотличимые от лидера

1	2	3	4
Номер в каталоге Муалема и название объекта исследования	RHC-MVG	RHC-MKT	RHC-MT
1006 «Beit Netofa clay»	–	0.0422 – лидер	не отличается от лидера
2001 «Silt "Columeia»	–	не отличается от лидера	0.1253 – лидер
3001 «Weld silty clay loam»	не отличается от лидера	не отличается от лидера	0.0356 – лидер
3002 «Amarillo silty clay loam»	–	не отличается от лидера	0.0137 – лидер
3102 «Yolo light clay»	–	–	0.0674 – лидер
3304 «Touchet silt loam»	–	не отличается от лидера	0.0680 – лидер
3307 «Touchet silt loam G.E. 3»	не отличается от лидера	не отличается от лидера	0.0889 – лидер
3310 «Silt loam G.E. 3»	0.0422 - лидер	не отличается от лидера	не отличается от лидера
3402 «Gilat loam»	–	–	0.0142 – лидер
3403 «Pachapa loam»	–	–	0.0960 – лидер
3404 «Adelanto loam»	–	–	0.0893 – лидер
3405 «Indio loam»	–	0.0471 – лидер	–
3503 «Pachapa fine sandy clay»	–	–	0.1759 – лидер
4109 «Botany sand fraction (150-300 mic)»	–	не отличается от лидера	0.0083 – лидер
4120 «Gilat-fine sand»	–	0.0412 – лидер	–
4122 «Sinai sand»	не отличается от лидера	не отличается от лидера	0.0234 – лидер
4130 «Hygiene sandstone»	–	0.0865 – лидер	не отличается от лидера
4131 «Berea sandstone»	не отличается от лидера	0.0731 – лидер	не отличается от лидера

1	2	3	4
4133 « <i>Fine sand</i> (G.E.#13)»	–	не отличается от лидера	0.1432 – лидер
4134 « <i>Volcanic sand</i> »	не отличается от лидера	0.0233 – лидер	не отличается от лидера
4135 « <i>Gravelly sand</i> G.E.9»	не отличается от лидера	–	0.0387 – лидер
4136 « <i>Fine sand</i> G.E.2»	не отличается от лидера	не отличается от лидера	0.1774 – лидер

Из табл. 4 видно, что при прогнозировании значений относительной гидравлической проводимости функция RHC-MVG имеет минимальное значение RMSE для 8 объектов (лидер 1 раз, не отличается от лидера 7 раз); при этом достоверность преимущества над функциями RHC-MKT или RHC-MT не подтверждена ни для одного объекта. Функция RHC-MKT имеет минимальное значение RMSE для 16 объектов (лидер 6 раз, не отличается от лидера 10 раз); при этом достоверность преимущества над функцией RHC-MVG подтверждена для 9 объектов. Функция RHC-MT имеет минимальное значение RMSE для 20 объектов (лидер 15 раз, не отличается от лидера 5 раз); при этом достоверность преимущества над функцией RHC-MVG подтверждена для 12 объектов. Таким образом, функция RHC-MVG достоверно уступает гидравлическим функциям двух других систем.

Если принять во внимание, что главная ценность представленных в данной статье гидравлических функций заключается в том, что каждая пара функций, образующих ту или иную систему, имеет общие параметры, и для моделирования динамики почвенной (грунтовой) влаги гидравлические функции используются в паре, то имеет смысл сравнивать гидравлические функции именно по парам, т.е. сравнивать между собой системы гидравлических функций. Для этого рассмотрим совместно данные табл. 3 и 4.

В отношении RMSE система № 1 для 8 объектов из 22 занимает лидирующую позицию или статистически неотличимую от нее; при этом достоверное преимущество системы № 1 над системой № 2 подтверждено для 4 объектов, а преимущество системы № 1 над системой № 3 – только для одного объекта.

В отношении RMSE система № 2 для 11 объектов из 22 занимает лидирующую позицию или статистически неотличимую от нее; при этом достоверное преимущество системы № 2 над системой № 3 подтверждено для 2 объектов, а преимущество системы № 2 над системой № 1 – для 7 объектов.

В отношении RMSE система № 3 для 16 объектов из 22 занимает лидирующую позицию или статистически неотличимую от нее; при этом достоверное преимущество системы № 3 над системой № 2 подтверждено для 7 объектов, а преимущество системы № 3 над системой № 1 – для 9 объектов.

Анализ полученных результатов позволил выявить весьма незначительное преимущество WRC-функции Ван Генухтена в отношении точечной

аппроксимации опытных данных о водоудерживающей способности почвы (к тому же непринципиальное, поскольку данное качество не является основным), а также достоверное преимущество RHC-функций системы № 2 и системы № 3 над RHC-функцией Ван Генухтена в отношении прогнозирования значений относительной гидравлической проводимости. Из сравнения систем гидравлических функций видно, что система № 2 и система № 3 имеют достоверные преимущества над системой № 1, преимущество которой (в отношении пары функций совместно) над двумя другими системами выявлено только для одного объекта из 22. Интересно отметить, что для верификации своих функций Ван Генухтен использовал данные о 5 объектах из каталога Муалема. В данном исследовании рассмотрены 4 из 5 указанных объектов (результаты работы с пятым гистерезисным объектом авторы намерены представить в следующей публикации). Результаты для 4 объектов являются следующими: для двух объектов (3307 и 3310) не выявлено достоверных преимуществ системы № 1 ни над системой № 2, ни над системой № 3; для двух объектов (1006 и 4130) система № 1 имеет достоверно наибольшую погрешность по сравнению с двумя другими системами.

ДИСКУССИЯ

Бесспорное достоинство гидравлических функций Ван Генухтена системы № 1 (табл. 1) состоит в том, что они имеют общие параметры. Это позволяет методом точечной аппроксимации данных о водоудерживающей способности идентифицировать общие параметры, а затем с их помощью оценивать значения относительной гидравлической проводимости почвы (дисперсного грунта). Именно отмеченное преимущество обуславливает весьма широкое использование гидравлических функций Ван Генухтена при решении ряда задач в различных отраслях естествознания и инженерных наук. Данные функции используются в хорошо известных пакетах компьютерных программ, например Hydrus, Plaxis, и многих других разработках. Функции Ван Генухтена изучаются в университетах. За сорок лет использования они достигли такого уровня признания, что нередко принимаются в качестве неофициального стандарта. В таком статусе функции Ван Генухтена могут оставаться в течение неопределенно долгого времени: до того момента, когда, наконец, будет предложена более эффективная альтернатива в виде физически обоснованных гидравлических функций.

В данной работе авторы, отдавая должное научному авторитету Ван Генухтена, предприняли

попытку выявить недостатки разработанных им функций и обоснованно предложить гидравлические функции почвы (дисперсного грунта), параметры которых допускают физическую (физико-статистическую) интерпретацию. При этом авторы провели скрупулезный сравнительный анализ предлагаемых функций и функций Ван Генухтена.

Математикам хорошо известны условия «необходимости» и «достаточности». Данные условия имеют следующее отношение к задачам настоящего исследования. Для верификации разработанной модели необходимы данные натурных измерений — полученные лично разработчиком модели или заимствованные из литературы. Однако для обеспечения объективности результатов сравнения (например, двух моделей) недостаточно данных, полученных лично разработчиком модели: для такого исследования условие «достаточности» будет соблюдено при использовании независимых данных, полученных третьим лицом, которое не принимало участие в разработке сравниваемых моделей. Ван Генухтен опубликовал свою статью в 1980 г. В ней используется формула Муалема, которая была опубликована в 1976 г. При этом Ван Генухтен использовал общедоступные данные из каталога Муалема, который также был опубликован в 1976 г., т.е. за 4 года до выхода статьи Ван Генухтена. Отсюда видно, что Ван Генухтен использовал данные, в получении которых он не принимал участия. Иными словами, условие «достаточности» соблюдено Ван Генухтеном в полной мере. Авторы данной статьи с целью достижения максимальной объективности результатов сравнения предлагаемых функций с функциями Ван Генухтена использовали, во-первых, независимые данные; во-вторых, именно те данные из каталога Муалема, которые применял Ван Генухтен; в-третьих, наиболее полные данные из каталога Муалема. Используемые в рамках настоящего исследования данные по-прежнему являются общедоступными, и заинтересованный читатель имеет возможность проверить результаты, полученные авторами. Авторы будут признательны читателям, которые предпримут попытку опровергнуть полученные ими результаты (таков важнейший принцип научного дискурса), однако выражают сомнение, что это произойдет в обозримой перспективе (хотя функции представлены, а данные общедоступны). Вместе с тем авторы будут признательны всем читателям, которые смогут модернизировать компьютерные программы, такие как Hydrus и Plaxis, в которых применяются функции Ван Генухтена, добавив в них функции системы № 2 и/или системы № 3. Попутно следует отметить, что с математической точки зрения численное решение дифференциальных уравнений в программах Hydrus и Plaxis успешно осуществлено, однако с физической точки зрения поиск решения таких задач сводится к физически адекватному функциональному представлению коэффициентов данных уравнений, что, собственно, и осуществлено в данном исследовании.

Вернемся к функциям Ван Генухтена. Итак, они, наряду с отмеченным выше преимуществом, не

лишены ряда недостатков, о которых совершенно очевидно свидетельствуют полученные в данном исследовании результаты. Проанализируем имеющиеся недостатки.

Первый недостаток заключается в ошибочной интерпретации мультипликативного параметра α . Ван Генухтен изначально полагал, что величина $-\alpha$ обратно пропорциональна «давлению входа воздуха» («давлению барботирования»). Стоит отметить, что в WRC-функции, предложенной Бруксом и Кори (Brooks, Corey, 1964), интерпретация мультипликативного параметра в таком качестве является абсолютно правильной. Кстати, «давление входа воздуха» может быть достаточно просто измерено в условиях лабораторного опыта. Как известно, при иссушении почвы или дисперсного грунта вход первой порции воздуха в самые крупные поры исходно полностью влагонасыщенного порового пространства начинается, по определению, из состояния, которое характеризуется значением эффективного влагонасыщения $S_e = 1$. Данному условию полностью удовлетворяет WRC-функция Брукса и Кори. Однако если в WRC-функции Ван Генухтена принять $\psi = -1/\alpha$, то получится зависимое от экспоненциального параметра n значение величины $S_e = 2^{-(1-1/n)}$, которое не может быть равно единице при $n > 1$. Таким образом, очевидна ошибочность интерпретации параметра α , предложенной Ван Генухтеном. Тем не менее в мировой литературе имеется неисчислимое множество примеров тиражирования данной ошибки. К их числу относятся, например, статьи (Xianzhao et al., 2011; Kadhim, 2011; Oh et al., 2015; Bouchemella et al., 2016; Stark et al., 2017).

Второй недостаток функций Ван Генухтена заключается в принципиальной невозможности ни физической, ни геометрической интерпретации параметров из-за специфики построения WRC-функции, обусловленной необходимостью преодоления затруднений, возникающих при вычислениях по формуле Муалема. Ошибочность интерпретации мультипликативного параметра α показана выше. В отношении экспоненциального параметра n авторы утверждают, что не существует иного, нежели трансцендентное, математического решения, например в виде кривой, касательная к которой имела бы тангенс угла наклона, равный данному параметру. Иными словами, суждение о том, что параметр n характеризует наклон WRC-кривой, является весьма условным. Оба параметра (как мультипликативный, так и экспоненциальный) имеют отношение одновременно и к положению, и к наклону WRC-кривой, однако ни один из них в отдельности не описывает данный наклон.

Третий недостаток функций Ван Генухтена заключается в наличии ограничения на экспоненциальный параметр $n > 1$. Данное ограничение оказывается весьма чувствительным по отношению к почвам (дисперсным грунтам) с неоднородной текстурой (высокой дисперсией распределения частиц твердой фазы по размерам): прежде всего это относится к глинам и тяжелым суглинкам, для которых прогностическая погрешность

RHC-функции Ван Генухтена может оказаться неприемлемо высокой. Данная функция имеет достаточно низкую прогностическую погрешность (соизмеримую с погрешностями функций системы № 2 и системы № 3) только для значений параметра n существенно больше единицы (табл. 2 и 4): такие значения, как правило, характерны для почв (дисперсных грунтов) с достаточно однородной текстурой — прежде всего это относится к пескам и супесям. Данное обстоятельство следует особо учитывать при решении задачи неустановившейся фильтрации в теле грунтовых плотин (где пески и супеси, как правило, не применяются). Стоит отметить также, что указанное Ван Генухтенем математическое ограничение $n > 1$ не отражает в полной мере физический диапазон применимости метода Муалема-Ван Генухтена: следовало бы указать $n \gg 1$.

Четвертый недостаток функций Ван Генухтена заключается в том, что смену знака капиллярного давления влаги функция Ван Генухтена (по построению) не допускает. Однако если ставится задача учета феномена гистерезиса, свойственного водоудерживающей способности, то главные ветви иссушения и увлажнения гистерезисной петли могут существенно различаться. В зоне влагонасыщения капиллярно-пористой среды ветви могут сходиться при положительных значениях давления влаги, в то время как в зоне аэрации почвы (дисперсного грунта) значения давления влаги, как известно, принимают отрицательные значения. Поэтому функция WRC-VG может с приемлемой погрешностью описывать гистерезисную водоудерживающую способность только таких (весьма редко встречающихся) почв и дисперсных грунтов, для которых главные ветви иссушения и увлажнения гистерезиса водоудерживающей способности образуют полностью замкнутую петлю в диапазоне отрицательных значений капиллярного давления влаги.

Пятый недостаток функций Ван Генухтена заключается в том, что они не обладают способностью к экстраполяции по очевидной причине отсутствия физического смысла параметров данных функций. Иными словами, если параметры определены на заданном интервале измеренных WRC-значений, то ожидать приемлемо низкой погрешности прогнозирования RHC-значений можно только на том же интервале, как показано в статье (Терлеев и др., 2017).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Гидравлические функции почвы (дисперсного грунта) системы № 2 и системы № 3 имеют то же достоинство, что и функции системы № 1, которое заключается в общности параметров. Однако преимущество функций системы № 2 и системы № 3 состоит в том, что их общие параметры имеют физический (физико-статистический) смысл. Кроме того, функции системы № 2 и системы № 3 с аддитивным параметром лишены перечисленных выше недостатков, причем они имеют достоверные преимущества над функциями системы № 1 в отношении прогнозирования значений относительной

гидравлической проводимости почв (дисперсных грунтов).

Для проведения гидрофизических расчетов рекомендуется использовать гидравлические функции, сгруппированные в систему № 2 и систему № 3 (табл. 1). Авторы отдают предпочтение системе № 3, поскольку она представлена соотношениями, в которых использованы элементарные функции, а также показала наилучший результат при прогнозировании значений относительной гидравлической проводимости. Для параметрической идентификации предлагаемых функций и их сравнения с мировыми аналогами рекомендуется использовать компьютерную программу (Гиневский и др., 2019).

В своем исследовании Ван Генухтен изначально намеревался применить WRC-функцию системы № 3 (без аддитивного параметра). Это был верный выбор, поскольку данная функция имеет под собой физическую основу. Однако по причине затруднений, возникших при проведении аналитического расчета по формуле Муалема (в вычислении интегралов), Ван Генухтен вместо того, чтобы использовать физически обоснованную аппроксимацию изначально выбранной WRC-функции, решил «исправить» данную функцию. Усложнив ее в математическом отношении, он получил искомое аналитическое решение. Разумеется, Ван Генухтен полагал, что усложнение существенно не повлияет на физическую адекватность функций. Действительно, при значениях экспоненциального параметра, заметно больших единицы $n \gg 1$, с этим можно условно согласиться. Однако на самом деле «исправление» изначально выбранной WRC-функции привело к полному исключению какой-либо возможности физической (физико-статистической) или геометрической интерпретации параметров предложенных Ван Генухтенем функций. Авторы данной статьи выбрали более предпочтительный в методологическом отношении подход к решению задачи. Для WRC-функции, изначально выбранной Ван Генухтенем для подстановки в формулу Муалема, предложена физико-статистическая аппроксимация. Иными словами, WRC-функция была преобразована к другому виду, для которого имеется физико-статистическое обоснование. С предложенной аппроксимацией были проведены аналитические вычисления по формуле Муалема, а в отношении результата такого вычисления было предпринято обратное преобразование. В итоге авторами данной статьи было получено решение, которое в частном случае (при равенстве нулю аддитивного параметра) представляет собой решение задачи Ван Генухтена в ее исходной постановке, так и не полученное самим Ван Генухтенем в 1980 г. Вместо весьма востребованных физических функций им были предложены эмпирические функции, которые в течение сорока лет используются в глобальном масштабе. В данной статье читателю, заинтересованному в развитии моделирования гидрофизических свойств почв и дисперсных грунтов, представлены более эффективные физически обоснованные аналоги, преимущества которых над эмпирическими функциями Ван Генухтена

максимально доказаны на примере тех же самых данных, которые использовались Ван Генухтеном для верификации предложенных им моделей.

Авторы рекомендуют профессорско-преподавательскому составу ведущих отечественных университетов при подготовке научно-педагогических кадров в области физики почвы, грунтоведения, гидромелиорации и гидротехнического строительства наряду с функциями Ван Генухтена, имеющими несомненный исторический интерес, применять в обучении студентов и аспирантов физически обоснованные гидравлические функции, в том числе функции системы № 2 и системы № 3, преимущества которых над функциями Ван Генухтена достоверно подтверждены результатами проведенного авторами исследования на репрезентативной выборке почв (дисперсных грунтов) различного генезиса и гранулометрического состава.

Авторы предлагают коллегам из НИИ применять современные достижения в области

математического моделирования гидрофизических свойств почв и дисперсных грунтов. Разумеется, следует сравнивать результаты применения таких достижений с мировыми аналогами. Совершенно очевидно, что для проведения такого сравнения наиболее подходят широко применявшиеся в течение сорока лет функции Ван Генухтена. Если коллегам из НИИ удастся получить достоверные подтверждения преимущества системы № 1 над системой № 2 или системой № 3 при решении конкретных задач (вопреки сомнениям авторов), то они послужат бесценным материалом для дальнейшего усовершенствования предложенных здесь функций, в чем и заключается общий принцип научного дискурса.

В последующих публикациях авторы намерены доказать преимущества предложенных здесь функций над функциями Ван Генухтена в отношении гистерезисной развертки на примере независимых данных из того же каталога Муалема (Mualem, 1976b).

Список литературы

- Гиневский Р.С., Терлеев В.В., Топаж А.Г., Лазарев В.А. SOILHYDROPHYSICS-V.1.0. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019667106, 19.12.2019. Заявка № 2019662561 от 12.10.2019.
- Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: Изд. Физматлит, 2006. 816 с.
- Терлеев В.В., Миршель В., Баденко В.Л., Гусева И.Ю. Усовершенствованный метод Муалема-Ван Генухтена и его верификация на примере глинистой почвы Бейт Нетофа // Почвоведение. 2017. № 4. С. 457–467 (DOI: 10.1134/S1064229317040135).
- Терлеев В.В., Гиневский Р.С., Лазарев В.А., Топаж А.Г., Дунаева Е.А. Функциональное представление водоудерживающей способности и относительной гидравлической проводимости почвы с учетом гистерезиса // Почвоведение. 2021. № 6. С. 715–724 (DOI: 10.1134/S1064229321060144).
- Bouchemella S., Ichola I.A., Séridi A. Estimation of the empirical model parameters of unsaturated soils. E3S Web of Conferences. 2016. Vol. 9 (Article No 16007) (DOI: 10.1051/e3sconf/20160916007).
- Brooks R.H., Corey A.T. Hydraulic Properties of Porous Media. Hydrology Papers 3, Colorado State University, Fort Collins, 1964. 27 p.
- Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration // Soil Sci. Soc. Am. J. 1977. 41: 285-294.
- Kadhim A.J. Models to predict unsaturated hydraulic conductivity with the use of RETC code // Iraqi Journal of Agricultural Sciences. 2011. 42 (Special Issue): 150-164.
- Kosugi K. Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention // Water Resour. Res. 1994. 30: 891-901.
- Kosugi K. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties // Water Resour. Res. 1996. 32: 2697-2703.
- Mualem Y. A new model for predicting hydraulic conductivity of unsaturated porous media // Water Resour. Res. 1976a. 12: 513-522.
- Mualem Y. A catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils. Research Project 442. Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 1976b. 100 p.
- Nasta P., Assouline S., Gates J.B., Hopmans J.W., Romano N. Prediction of unsaturated relative hydraulic conductivity from Kosugi's water retention function // Procedia Environmental Sciences. 2013. 19: 609-617 (DOI: 10.1016/j.proenv.2013.06.069).
- Oh S., Kim Y.K., Kim J.W. A Modified van Genuchten-Mualem model of hydraulic conductivity in Korean Residual soils // Water. 2015. 7 (10): 5487-5502 (DOI: 10.3390/w7105487).
- Stark T.D., Jafari N.H., Zhindon J.S.L., Baghdady A. Unsaturated and Transient Seepage Analysis of San Luis Dam // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 2017. Vol. 143 (2) (DOI: 10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0001602).
- Terleev V.V., Nikonorov A.O., Ginevsky R.S., Lazarev V.A., Togo I., Topaj A.G., Moiseev K.G., Pavlova V.A., Layshev K.A., Arkhipov M.V., Melnichuk A.Yu., Dunaieva E.A., Mirschel W. Hysteresis of the soil water-retention capacity: estimating the scanning branches // Magazine of Civil Engineering. 2018. 1 (77): 141-148 (DOI: 10.18720/MCE.77.13).
- Terleev V., Mirschel W., Nikonorov A., Ginevsky R., Lazarev V., Pavlova V., Topaj A., Pashtetsky V., Dunaieva I., Popovych V., Melnichuk A., Layshev K. Improved hydrophysical functions of the soil and their comparison with analogues by the Williams-Kloot test // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2019. 983: 449-461 (DOI: 10.1007/978-3-030-19868-8_45).

- Van Genuchten M.Th. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J. 1980. 44: 892-989.
- Xianzhao L., Xingxiu Y., Shujian X. A new method to estimate the parameters of van Genuchten retention model using degree of phosphorus saturation (DPS) // African Journal of Agricultural Research. 2011. 6 (20): 4800-4806 (DOI: 10.5897/AJAR11.700).

References

- Ginevskiy R.S., Terleyev V.V., Topazh A.G., Lazarev V.A. SOILHYDROPHYSICS-V.1.0. Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya EVM RU 2019667106, 19.12.2019. Zayavka № 2019662561 ot 12.10.2019.
- Kobzar' A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov* [Applied mathematical statistics. For engineers and scientists]. Moscow: Fizmatlit, 2006, 816 p.
- Terleyev V.V., Mirschel W., Badenko V.L., Guseva I.Yu. Uovershenstvovannyi metod Mualema-Van Genukhtena i yego verifikatsiya na primere glinistoy pochvy Beyt Netofa // *Pochvovedeniye*, 2017, no. 50 (4), pp. 457–467 (DOI: 10.1134/S1064229317040135).
- Terleyev V.V., Ginevskiy R.S., Lazarev V.A., Topazh A.G., Dunayeva Ye.A. Funktsional'noye predstavleniye vodouderzhivayushchey sposobnosti i otnositel'noy gidravlicheskoj provodimosti pochvy s uchetoм gisterezisa // *Pochvovedeniye*, 2021, no. 54 (6), pp. 715-724 (DOI: 10.1134/S1064229321060144).
- Bouchemella S., Ichola I.A., Séridi A. Estimation of the empirical model parameters of unsaturated soils. E3S Web of Conferences. 2016, vol. 9 (Article No 16007) (DOI: 10.1051/e3sconf/20160916007).
- Brooks R.H., Corey A.T. Hydraulic Properties of Porous Media. Hydrology Papers 3, Colorado State University, Fort Collins, 1964, 27 p.
- Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration // Soil Sci. Soc. Am. J., 1977, 41: 285-294.
- Kadhim A.J. Models to predict unsaturated hydraulic conductivity with the use of RETC code // Iraqi Journal of Agricultural Sciences, 2011, 42 (Special Issue): 150-164.
- Kosugi K. Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention // Water Resour. Res., 1994, 30: 891-901.
- Kosugi K. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties // Water Resour. Res., 1996, 32: 2697-2703.
- Mualem Y. A new model for predicting hydraulic conductivity of unsaturated porous media // Water Resour. Res., 1976a, 12: 513-522.
- Mualem Y. A catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils. Research Project 442. Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 1976b, 100 p.
- Nasta P., Assouline S., Gates J.B., Hopmans J.W., Romano N. Prediction of unsaturated relative hydraulic conductivity from Kosugi's water retention function // Procedia Environmental Sciences, 2013, 19: 609-617 (DOI: 10.1016/j.proenv.2013.06.069).
- Oh S., Kim Y.K., Kim J.W. A Modified van Genuchten-Mualem model of hydraulic conductivity in Korean Residual soils // Water, 2015, 7 (10): 5487-5502 (DOI: 10.3390/w7105487).
- Stark T.D., Jafari N.H., Zhindon J.S.L., Baghdady A. Unsaturated and Transient Seepage Analysis of San Luis Dam // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2017, vol. 143 (2) (DOI: 10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0001602).
- Terleev V.V., Nikonorov A.O., Ginevsky R.S., Lazarev V.A., Togo I., Topaj A.G., Moiseev K.G., Pavlova V.A., Layshev K.A., Arkhipov M.V., Melnichuk A.Yu., Dunaieva E.A., Mirschel W. Hysteresis of the soil water-retention capacity: estimating the scanning branches // Magazine of Civil Engineering, 2018, 1 (77): 141-148 (DOI: 10.18720/MCE.77.13).
- Terleev V., Mirschel W., Nikonorov A., Ginevsky R., Lazarev V., Pavlova V., Topaj A., Pashtetsky V., Dunaieva I., Popovych V., Melnichuk A., Layshev K. Improved hydrophysical functions of the soil and their comparison with analogues by the Williams-Klout test // Advances in Intelligent Systems and Computing, 2019, 983: 449-461 (DOI: 10.1007/978-3-030-19868-8_45).
- Van Genuchten M.Th. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J., 1980, 44: 892-989.
- Xianzhao L., Xingxiu Y., Shujian X. A new method to estimate the parameters of van Genuchten retention model using degree of phosphorus saturation (DPS) // African Journal of Agricultural Research, 2011, 6 (20): 4800-4806 (DOI: 10.5897/AJAR11.700).