УДК 631.43+004.65 DOI: 10.25695/AGRPH.2024.02.02

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИСТЕРЕЗИСНОЙ ВОДОУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КАПИЛЛЯРНО-ПОРИСТОЙ СРЕДЫ И СРАВНЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ВАН ГЕНУХТЕНА С ФИЗИЧЕСКИ ОБОСНОВАННЫМИ АНАЛОГАМИ

В. В. Терлеев[1, 2*], В. А. Лазарев[1], Р. С. Гиневский[1], В. В. Гарманов[2], Е. А. Дунаева[3]

[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29;
[2]Санкт-Петербургский государственный аграрный университет,
196601, Санкт-Петербург, г. Пушкин, Петербургское шоссе, 2;
[3]Научно-исследовательский институт сельского хозяйства Крыма,
295543, г. Симферополь, Киевская ул., 150,
**E-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.02.2024, принята к печати 21.05.2024

Осознанные к настоящему времени пробелы в отношении обоснования гидрофизических свойств капиллярно-пористой среды, такой как почва или дисперсный грунт, в рамках существующих концепций естествознания представляют собой важную научную проблему. Она приобрела особую актуальность в связи с необходимостью разработки математической модели, физически адекватно описывающей гистерезис водоудерживающей способности такой среды. Целью работы является раскрытие и физическое обоснование закономерностей взаимодействия воды как жидкости с твердой фазой почвы или дисперсного грунта. Предложено теоретическое описание гистерезисного свойства капиллярно-пористой среды удерживать влагу, опирающееся на представления о физической природе межфазного взаимодействия в данной среде при участии воды. Рассмотрены достоинства и недостатки эмпирической функции Ван Генухтена, выявлены ошибки в отношении интерпретации ее параметров. Сформулированы два физически (физико-статистичес ки) обоснованных аналога данной функции, которые представляют собой усовершенствованные версии оригинальных моделей Косуги, а также Хаверкампа с соавторами. Усовершенствование указанных моделей достигнуто посредством применения аддитивного параметра, который адекватно учитывает «*давление входа воздуха*» для ветвей иссушения, а также «*давление входа воды*» для ветвей увлажнения петли гистерезиса. Выполнена серия вычислительных экспериментов, по результатам которых проведено сравнение эмпирической функции Ван Генухтена, оригинальных физически (физико-статистически) обоснованных моделей Косуги и Хаверкампа с соавторами, а также усовершенствованных версий указанных моделей. Для устранения нежелательного методического «*эффекта помпы*» применены равные значения экспоненциального параметра для ветвей иссушения и увлажнения петли гистерезиса. Использованы независимые данные о гистерезисе водоудерживающей способности 16-ти объектов (почв и дисперсных грунтов) из авторитетного литературного источника. Достоверность результатов оценена на основе критерия Вильямса-Клута. Доказаны преимущества физически (физико-статистически) обоснованных моделей перед эмпирической функцией Ван Генухтена.

Ключевые слова: почва, дисперсный грунт, водоудерживающая способность, математическая модель, гистерезис, точечная аппроксимация данных, прогнозирование сканирующих ветвей.

SIMULATION OF HYSTERESIS WATER-RETENTION CAPACITY OF CAPILLARY-POROUS MEDIA AND COMPARISON OF THE VAN GENUCHTEN EMPIRICAL FUNCTION WITH PHYSICALLY BASED ANALOGUES

V. V. Terleev[1, 2*], V. A. Lazarev[1], R. S. Ginevskiy[1], V. V. Garmanov[2], E. A. Dunaeva[3]

[1]Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29, Polytekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia;
St. Petersburg State Agrarian University
2, Peterburgskoye highway, Pushkin, St. Petersburg, 196601, Russia;
[3]Research Institute of Agriculture of Crimea
150, Kievskaya St., Simferopol, 295543, Russia
[*]E-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru

The currently recognized gaps in relation to the substantiation of the hydrophysical properties of a capillary-porous media, such as soils, within the framework of existing natural science concepts represent an important scientific problem. It has acquired particular relevance due to the need to develop a mathematical model that physically adequately describes the hysteresis of the water-retention capacity of such a media. The purpose of the work is to reveal and physically substantiate the interaction patterns of water, as a liquid, with the soil solid material. A theoretical description of the hysteretic property of a capillary-porous media

to retain moisture is proposed, based on ideas about the physical nature of interphase interaction in the media with the participation of water. The advantages and disadvantages of the Van Genuchten empirical function are considered, and errors in the interpretation of the function parameters are identified. Two physically (physics-statistically) substantiated analogues of this function are formulated, which are improved versions of the original models of Kosugi, as well as Haverkamp et al. The improvement of these models was achieved by using an additive parameter that adequately takes into account the «air entry pressure» for the drying branches, as well as the «water entry pressure» for the wetting branches of the hysteresis loop. A series of computational experiments was carried out, the results of which compared the empirical function of Van Genuchten, the original physically (physics-statistically) substantiated models of Kosugi and Haverkamp et al., as well as improved versions of these models. To eliminate the undesirable methodological «pump effect», equal values of the exponential parameter were used for the drying and wetting branches of the hysteresis loop. Independent data on the hysteresis of the water-retention capacity of sixteen soils and soil-like materials from an authoritative literary source were used. The reliability of the results was assessed with the Williams-Kloot criterion. The advantages of physically (physics-statistically) substantiated models over the Van Genuchten empirical function have been proven.

Key words: soil, soil-like material, water-retention capacity, mathematical model, hysteresis, point data approximation, predictive assessment of scanning branches.

ВВЕДЕНИЕ

Водоудерживающую способность (WRC − *water-retention capacity*) капиллярно-пористой среды (почвы или дисперсного грунта) принято формулировать в виде зависимости $\theta(\psi)$, где θ [см^3 см$^{-3}$] − объемная влажность данной среды, а ψ [см H_2O] − капиллярное давление (капиллярно-сорбционный потенциал) влаги. Указанную зависимость обычно называют функцией водоудерживающей способности, или ОГХ − основной гидрофизической характеристикой (Глобус, 1969). До сих пор в научной литературе не было представлено исчерпывающе полного физического (физико-статистического) обоснования водоудерживающей способности. Поэтому при математическом описании зависимости $\theta(\psi)$ часто используются эмпирические соотношения, которые предназначены, в принципе, только для точечной аппроксимации данных натурных измерений. Широко известным примером таких эмпирических соотношений является WRC-функция Ван Генухтена (Van Genuchten, 1980).

Актуальность работы, выполняемой авторами данной статьи, определяется востребованностью физически (физико-статистически) обоснованного математического описания $\theta(\psi)$ почвы или дисперсного грунта. *Научной проблемой* являются осознанные пробелы в теоретическом описании $\theta(\psi)$ в гистерезисной развертке, опирающемся на физические представления. *Цель работы* заключается в восполнении пробелов в физически адекватном описании закономерностей, которым подчиняется водоудерживающая способность почвы или дисперсного грунта при учете гистерезиса. Указанная цель достигается посредством решения следующих *задач исследования*: 1) математическое формулирование закономерностей, характерных для водоудерживающей способности почвы или дисперсного грунта в отношении воды, в виде функциональных зависимостей на основе физических представлений о природе межфазного взаимодействия в капиллярно-пористой среде с учетом феномена гистерезиса; 2) верификация сформулированных зависимостей при помощи вычислительного эксперимента с использованием данных о 16-ти объектах из литературы (Mualem, 1976) и проведение сравнительного анализа различных WRC-функций, а также эмпирической WRC-функции Ван Генухтена в отношении RMSE-погрешностей (значений корня квадратного из суммы квадратов отклонений результатов вычисления от опытных данных) на основе критерия Вильямса-Клута (Кобзарь, 2006).

МЕТОД И ОБЪЕКТЫ

В качестве количественной меры насыщения почвы или дисперсного грунта водой в жидком агрегатном состоянии достаточно часто используется величина эффективного влагонасыщения $S_e = (\theta - \theta_R)/(\theta_S - \theta_R)$, где θ_S [см^3·см$^{-3}$] − объемная влажность насыщения; θ_R [см^3·см$^{-3}$] − объемная остаточная влажность. При увлажнении или иссушении капиллярно-пористой среды вода переходит из одного энергетического состояния в другое, характеризуемое величиной ψ; при этом величина S_e принимает значения от 0 до 1. Энергетическое состояние влаги в почве или дисперсном грунте далее будем описывать величиной x, однозначно связанной с ψ и определяющей величину S_e (Терлеев и др., 2023). Зависимость $S_e = S_e(x)$ будем формулировать в виде монотонно возрастающей и непрерывно дифференцируемой функции. Величину S_e отождествим с вероятностью обнаружения воды как жидкости (энергетическое состояние которой характеризуется величиной ψ) в выбранной случайным образом точке капиллярно-пористой среды, а поиск решения задачи моделирования водоудерживающей способности сведем к описанию распределения вероятностей по значениям величины x, принимаемой за нормальную случайную величину и однозначно связанной с ψ (Терлеев и др., 2023). В табл. 1 WRC-функции (1) и (2) базируются на физических (физико-статистических) концепциях межфазного взаимодействия в почве или дисперсном грунте при участии воды. В табл. 1 приведена WRC-функция (3), которую ни физически, ни физико-статистически обосновать невозможно, но которая сыграла заметную роль в истории гидрофизики почвы (грунтоведения). Все зависимости в табл. 1 следует рассматривать в качестве непрерывных аппроксимаций по отношению друг к другу. При этом легко убедиться, что наибольшее сходство имеют WRC-функции (1) и (2), которые в

дифференциальной форме принимают равные значения при $x = 0$, когда $S_e = 1/2$ и когда выполняется равенство $4 = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$. Параметры n и $dS_e/dx = n/$ σ в WRC-функциях (1) и (2) имеют вполне определенный смысл (табл. 1). В качестве аргумента всех трех WRC-функций из табл. 1 примем величину $x = -ln\left(-\alpha(\psi - \psi_e)\right)$, где $\alpha = -1/(\psi_0 - \psi_e)$ [см H_2O^{-1}], ψ_e [см H_2O] – параметр, используемый для учета «*давления входа воздуха*» (ветви иссушения гистерезиса), а также «*давления входа воды*» (ветви увлажнения гистерезиса); ψ_0 [см H_2O] – параметр, который применяется для описания капиллярного давления влаги (соответствующего значению $x = 0$), при котором плотность распределения вероятностей (формула (2)) по значениям x достигает максимума (Терлеев и др., 2023).

В табл. 1 используется специальная функция: $erfc\left(\frac{-x}{\sigma\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{-x}{\sigma\sqrt{2}}} exp(-t^2)dt$ – дополнительная функция ошибок.

При исключении параметра ψ_e из величины x получим соотношения, представленные в табл. 2.

Далее для WRC-функций введем специальные обозначения и в интегральной форме сгруппируем их в табл. 3.

Таблица 1. WRC-функции

Дифференциальная форма	Интегральная форма
$x = -ln\left(-\alpha(\psi - \psi_e)\right)$, где $\alpha = -1/(\psi_0 - \psi_e)$ [см H_2O^{-1}], ψ_e [см H_2O] и ψ_0 [см H_2O] – параметры	
$\frac{dS_e}{dx} = nS_e(1 - S_e)$	$S_e = \begin{cases} \left(1 + exp(-nx)\right)^{-1}; \\ 1/2\,, x = 0 \end{cases}$ (1)
n – экспоненциальный параметр, имеющий физический смысл относительной (приведенной) дифференциальной емкости почвы по отношению к воде как жидкости в форме $dln(S_e/(1 - S_e))/dx$ $(n > 0)$, в геометрической интерпретации данный параметр равен тангенсу угла наклона касательной к графику функции $ln\left(S_e(x)/\left(1 - S_e(x)\right)\right)$; ψ_e [см H_2O] – аддитивный параметр, имеющий смысл «*давления входа воздуха*» («*давление барботирования*») или *«давления входа воды»*; ψ_0 [см H_2O] – мультипликативный параметр, имеющий смысл капиллярного давления влаги при $x = 0$ в точке перегиба WRC-кривой	
$\frac{dS_e}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2\right)$	$S_e = \begin{cases} \frac{1}{2} erfc\left(\frac{-x}{\sigma\sqrt{2}}\right); \\ 1/2\,, x = 0 \end{cases}$ (2)
σ – стандартное отклонение нормальной случайной величины x с нулевым генеральным средним (σ>0)	
$\frac{dS_e}{dx} = (n - 1)S_e\left(1 - S_e^{\frac{n}{n-1}}\right)$	$S_e = \begin{cases} \left(1 + exp(-nx)\right)^{-(1-1/n)}; \\ (1/2)^{1-1/n}, x = 0 \end{cases}$ (3)
α и n – эмпирические параметры одновременно и положения, и формы WRC-кривой, не допускающие физической (физико-статистической) и геометрической интерпретации (n>0)	

Таблица 2. WRC-функции без аддитивного параметра

Авторы	Математическое описание
Модель (Haverkamp et al., 1977); мультипликативный параметр ψ_0 $-1/\alpha$ играет роль капиллярного давления, при котором $S_e = 1/2$; $n > 0$	$S_e = \begin{cases} (1 + (-\alpha\psi)^n)^{-1}, \psi < 0; \\ 1, \psi = 0 \end{cases}$ (1a)
Модель (Kosugi, 1994, 1996); мультипликативный параметр $\psi_0 = -1/\alpha$ играет роль капиллярного давления, при котором $S_e = 1/2$; $\sigma > 0$	$S_e = \begin{cases} \frac{1}{2} erfc\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} ln(-\alpha\psi)\right), \psi < 0; \\ 1, \psi = 0 \end{cases}$ (2a)
Модель (Van Genuchten, 1980); мультипликативный параметр ψ_0 $-1/\alpha$ принципиально не может играть роли «*давления входа воздуха*», поскольку $S_e = (1/2)^{1-1/n} \neq 1$ при $\psi = \psi_0$; $n > 1$	$S_e = \begin{cases} (1 + (-\alpha\psi)^n)^{-(1-1/n)}, \psi < 0; \\ 1, \psi = 0 \end{cases}$ (3a)

Таблица 3. Сравниваемые WRC-функции в интегральной форме

№ WRC-функции	Авторы / обозначения	Математическое описание
1	Оригинальная функция Ван Генухтена / WRC-VG	$S_e = \begin{cases} (1+(-\alpha\psi)^n)^{-(1-1/n)}, \psi < 0; \\ 1, \psi = 0, \\ (n > 1) \end{cases}$
2	Усовершенствованная функция Косуги / WRC-KT	$S_e = \begin{cases} \frac{erfc}{2}\left(\frac{n\sqrt{\pi}}{4} ln\left(-\alpha(\psi-\psi_e)\right)\right), \psi < \psi_e; \\ 1, \psi \geq \psi_e \end{cases}$
3	Оригинальная функция Косуги / WRC-KT$_0$	$S_e = \begin{cases} \frac{erfc}{2}\left(\frac{n\sqrt{\pi}}{4} ln(-\alpha\psi)\right), \psi < 0; \\ 1, \psi = 0 \end{cases}$
4	Усовершенствованная функция Хаверкампа с соавторами / WRC-HT	$S_e = \begin{cases} \left(1+\left(-\alpha(\psi-\psi_e)\right)^n\right)^{-1}, \psi < \psi_e; \\ 1, \psi \geq \psi_e \end{cases}$
5	Оригинальная функция Хаверкампа с соавторами / WRC-HT$_0$	$S_e = \begin{cases} (1+(-\alpha\psi)^n)^{-1}, \psi < 0; \\ 1, \psi = 0 \end{cases}$

WRC-функции в табл. 3 содержат: ψ_e – аддитивный параметр; α – мультипликативный параметр; n – экспоненциальный параметр. В частном случае (при $\psi_e = 0$) WRC-KT, а также WRC-HT трансформируются в функцию WRC-KT$_0$ (Kosugi, 1994, 1996), а также в функцию WRC-HT$_0$ (Haverkamp et al., 1977) соответственно (Терлеев и др., 2023). При учете гистерезиса будем использовать в параметрах дополнительные нижние индексы: для ветвей иссушения $\alpha = \alpha_d, n = n_d, \psi_0 = \psi_{0,d}, \psi_e = \psi_{e,d} \leq 0$; для ветвей увлажнения $\alpha = \alpha_w, n = n_w,\ \psi_0 = \psi_{0,w}$, $\psi_e = \psi_{e,w} \geq \psi_{e,d}$ (следует заметить, что параметр $\psi_{e,w}$ может принимать положительные значения).

Причины гистерезиса водоудерживающей способности почвы (дисперсного грунта) рассмотрены в работе (Terleev et al., 2019). В настоящем исследовании они учитываются двумя наборами значений параметров, описывающих распределение пор по размерам ($n_d, \psi_{0,d}$ для ветвей иссушения и n_w, $\psi_{0,w}$ для ветвей увлажнения), и двумя значениями параметра, который описывает «*давление входа воздуха*» $\psi_{e,d}$ при иссушении, а также «*давление входа воды*» $\psi_{e,w}$ при увлажнении (Terleev et al., 2018, 2019). В статье (Terleev et al., 2022) рассмотрен нежелательный методический эффект (именуемый «*эффектом помпы*» и характерный для моделей гистерезиса $\theta(\psi)$), а также предложен прием устранения данного эффекта, заключающийся в применении равенства $n_d = n_w$. Для верификации и сравнения WRC-функций в табл. 3 (при $n_d = n_w$) использованы литературные данные о гистерезисе $\theta(\psi)$ 16-ти объектов (почв и дисперсных грунтов различного генезиса и текстуры) (Mualem, 1976).

В треугольнике Ферре, изображенном на рис., точками обозначены 16 объектов исследования (Mualem, 1976). Данные о главных ветвях иссушения и граничных ветвях увлажнения $\theta(\psi)$ указанных объектов применяются для идентификации (настройки) параметров, а данные о сканирующих ветвях гистерезиса используются для сопоставления прогнозных оценок с результатами натурных измерений. Для идентификации параметров WRC-функций и сравнения погрешностей WRC-функций из табл. 3 применяется пакет компьютерных программ SOILHYSTERESIS-V.1.0 (Гиневский и др., 2019). В данном пакете реализован алгоритм расчета сканирующих ветвей гистерезиса, описанный в работе (Scott et al., 1983).

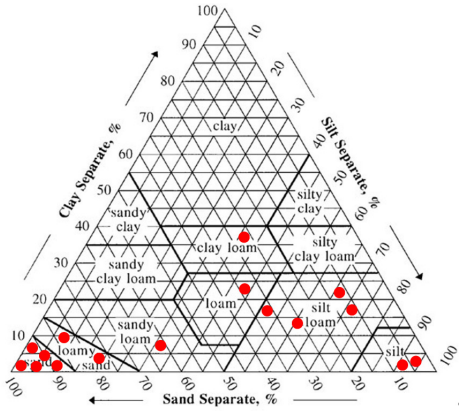

Рис. Треугольник Ферре: точками отмечены 16 исследуемых объектов (Mualem, 1976)

РЕЗУЛЬТАТЫ

Табл. 4 содержит параметры WRC-функций из табл. 3, идентифицированные путем точечной аппроксимации данных о главных ветвях иссушения и граничных ветвях увлажнения петли гистерезиса $\theta(\psi)$.

В табл. 5*а* представлены результаты сравнительного анализа WRC-функций из табл. 3 в отношении значений RMSE, полученных при точечной аппроксимации данных о главных ветвях иссушения и граничных ветвях увлажнения гистерезиса $\theta(\psi)$, на основе критерия Вильямса-Клута (Кобзарь, 2006) ($\lambda_{0.95}$ и $\lambda_{0.99}$). Лидером признается WRC-функция с минимальным значением RMSE без учета аналогов, которые статистически не отличаются от лидера, затем на основе критерия Вильямса-Клута выявляется группа WRC-функций, которые в статистическом смысле являются неотличимыми от лидера (Терлеев и др., 2023).

Таблица 4. Параметры пяти WRC-функций для 16-ти объектов исследования ($n_d = n_w$)

№ WRC-функции	Параметры									
	$\square_r$	$\square_s$	$\psi_{e,d}$	$\psi_{0,d}$	α_d	$\psi_{e,w}$	$\psi_{0,w}$	α_w	n_d	n_w
2002 *«Silt Mont Cenis»* (Mualem, 1976)										
1	0.0000	0.4420	–	–167.97	0.0060	–	–38.82	0.0258	1.228	1.228
2	0.0000	0.4420	–4.12	–3399.97	0.0003	–1.01	–748.43	0.0013	0.575	0.575
3	0.0000	0.4420	–	–3290.88	0.0003	–	–748.87	0.0013	0.586	0.586
4	0.0000	0.4420	–5.09	–3269.84	0.0003	–3.02	–726.31	0.0014	0.610	0.610
5	0.0000	0.4420	–	–3145.70	0.0003	–	–722.77	0.0014	0.626	0.626
2003 *«Silt of Nave-Yaar»* (Mualem, 1976)										
1	0.3949	0.5770	–	–11.61	0.0861	–	–6.30	0.1587	1.927	1.927
2	0.3850	0.5770	–6.61	–22.16	0.0643	0.25	–12.77	0.0768	0.897	0.897
3	0.4065	0.5770		–20.09	0.0498	–	–10.92	0.0916	1.479	1.479
4	0.3783	0.5770	–6.91	–23.46	0.0604	0.04	–13.84	0.0720	0.858	0.858
5	0.4038	0.5770	–	–20.54	0.0487	–	–11.19	0.0894	1.504	1.504
3101 *«Rideau clayey loam»* (Mualem, 1976)										
1	0.2880	0.4160	–	–54.05	0.0185	–	–21.14	0.0473	2.637	2.637
2	0.2861	0.4160	–31.65	–68.15	0.0274	0	–29.37	0.0341	1.379	1.379
3	0.2910	0.4160	–	–68.68	0.0146	–	–30.85	0.0324	2.087	2.087
4	0.2869	0.4160	–30.77	–66.32	0.0281	0	–28.20	0.0355	1.468	1.468
5	0.2899	0.4160	–	–69.09	0.0145	–	–31.19	0.0321	2.172	2.172
3301 *«Carieol silt loam»* (Mualem, 1976)										
1	0.3158	0.4415	–	–97.84	0.0102	–	–34.32	0.0291	2.776	2.776
2	0.3180	0.4415	0	–127.81	0.0078	35.90	–45.14	0.0123	2.792	2.792
3	0.3193	0.4415	–	–122.34	0.0082	–	–43.34	0.0231	2.284	2.284
4	0.3167	0.4415	0	–129.11	0.0078	36.26	–45.65	0.0122	2.890	2.890
5	0.3179	0.4415	–	–124.12	0.0081	–	–43.95	0.0228	2.354	2.354
3302 *«Grenville silt loam»* (Mualem, 1976)										
1	0.1308	0.4750	–	–150.95	0.0066	–	–40.09	0.0249	1.494	1.494
2	0.1586	0.4750	–30.88	–490.29	0.0022	–10.99	–125.62	0.0087	0.856	0.856
3	0.1308	0.4750	–	–150.95	0.0066	–	–40.09	0.0249	1.494	1.494
4	0.1562	0.4750	–33.29	–498.85	0.0021	–11.81	–127.32	0.0087	0.870	0.870
5	0.1806	0.4750	–	–424.00	0.0024	–	–111.55	0.0090	1.148	1.148
3305 *«Ida silt loam (> 15 cm)»* (Mualem, 1976)										
1	0.0000	0.5300	–	–56.78	0.0176	–	–32.23	0.0310	1.306	1.306
2	0.1657	0.5300	0	–195.53	0.0051	27.65	–125.18	0.0065	1.200	1.200
3	0.1244	0.5300	–	–257.41	0.0039	–	–145.48	0.0069	0.868	0.868
4	0.1614	0.5300	0	–200.07	0.0050	26.26	–127.69	0.0065	1.226	1.226
5	0.1292	0.5300	–	–249.44	0.0040	–	–141.31	0.0071	0.925	0.925
3306 *«Ida silt loam (0–15 cm)»* (Mualem, 1976)										
1	0.0000	0.5540	–	–59.30	0.0169	–	–21.76	0.0460	1.231	1.231
2	0.1661	0.5540	0	–347.97	0.0029	36.09	–173.39	0.0048	1.006	1.006
3	0.1805	0.5540	–	–334.03	0.0030	–	–161.40	0.0062	1.089	1.089
4	0.1729	0.5540	0	–338.13	0.0030	35.98	–162.25	0.0050	1.066	1.066
5	0.1729	0.5540	–	–338.06	0.0030	–	–162.29	0.0062	1.069	1.069

№ WRC-функции	Параметры									
	$\square_r$	$\square_s$	$\psi_{e,d}$	$\psi_{0,d}$	α_d	$\psi_{e,w}$	$\psi_{0,w}$	α_w	n_d	n_w
3407 *«Guelph loam»* (Mualem, 1976)										
1	0.1418	0.5200	–	–69.95	0.0143	–	–14.52	0.0689	1.518	1.518
2	0.2348	0.5200	0	–138.35	0.0072	21.31	–31.81	0.0188	1.637	1.637
3	0.2378	0.5200	–	–135.40	0.0074	–	–31.29	0.0320	1.746	1.746
4	0.2279	0.5200	0	–137.70	0.0073	21.78	–31.75	0.0187	1.584	1.584
5	0.2092	0.5200	–	–165.71	0.0060	–	–36.73	0.0272	1.254	1.254
3501 *«Rubicon sandy loam»* (Mualem, 1976)										
1	0.1700	0.3810	–	–73.53	0.0136	–	–26.46	0.0378	3.301	3.301
2	0.1730	0.3810	–29.17	–93.03	0.0157	29.99	–35.58	0.0153	3.421	3.421
3	0.1886	0.3810	–	–89.33	0.0119	–	–26.95	0.0371	4.733	4.733
4	0.1750	0.3810	–18.05	–89.49	0.0140	26.99	–32.39	0.0168	3.679	3.679
5	0.1869	0.3810	–	–89.45	0.0112	–	–27.66	0.0361	4.724	4.724
4004 *«Loamy sand-hamra sharon»* (Mualem, 1976)										
1	0.1935	0.4280	–	–51.16	0.0195	–	–34.19	0.0292	3.881	3.881
2	0.2015	0.4280	0	–56.61	0.0177	22.14	–38.06	0.0166	4.367	4.367
3	0.2003	0.4280	–	–56.42	0.0177	–	–37.69	0.0265	3.453	3.453
4	0.2005	0.4280	0	–57.49	0.0174	20.33	–39.12	0.0168	4.722	4.722
5	0.1971	0.4280	–	–56.94	0.0176	–	–38.19	0.0262	3.545	3.545
4106 *«Sand #1»* (Mualem, 1976)										
1	0.0761	0.3300	–	–22.25	0.0449	–	–11.89	0.0841	3.564	3.564
2	0.0593	0.3300	0.0	–26.26	0.0381	24.02	–15.25	0.0255	5.102	5.102
3	0.0873	0.3300	–	–24.78	0.0404	–	–13.22	0.0756	3.222	3.222
4	0.0560	0.3300	0.0	–26.45	0.0378	24.50	–15.48	0.0250	5.256	5.256
5	0.0828	0.3300	–	–25.09	0.0399	–	–13.50	0.0741	3.303	3.303
4107 *«Sand #2»* (Mualem, 1976)										
1	0.0878	0.3050	–	–26.51	0.0377	–	–15.05	0.0664	5.625	5.625
2	0.0590	0.3050	–6.62	–30.18	0.0424	19.99	–17.13	0.0269	4.866	4.866
3	0.0928	0.3050	–	–27.60	0.0362	–	–15.69	0.0637	5.235	5.235
4	0.0540	0.3050	–5.58	–30.68	0.0398	20.00	–17.56	0.0266	4.867	4.867
5	0.0895	0.3050	–	–27.81	0.0360	–	–15.83	0.0632	5.318	5.318
4108 *«Del Monte fine sand»* (Mualem, 1976)										
1	0.0475	0.2980	–	–123.80	0.0081	–	–62.73	0.0159	4.699	4.699
2	0.0505	0.2980	–18.20	–132.63	0.0087	–0.54	–67.04	0.0150	3.800	3.800
3	0.0507	0.2980	–	–133.25	0.0075	–	–67.08	0.0149	4.167	4.167
4	0.0482	0.2980	–27.17	–132.77	0.0095	–5.45	–67.48	0.0161	3.639	3.639
5	0.0493	0.2980	–	–133.41	0.0075	–	–67.52	0.0148	4.367	4.367
4112 *«Oakley sand»* (Mualem, 1976)										
1	0.0311	0.2702	–	–20.33	0.0492	–	–13.24	0.0755	2.364	2.364
2	0.0407	0.3020	0	–26.73	0.0374	9.83	–16.03	0.0387	2.459	2.459
3	0.0369	0.2733	–	–27.64	0.0362	–	–18.47	0.0541	1.808	1.808
4	0.0366	0.3053	0	–26.61	0.0376	8.61	–16.02	0.0406	2.307	2.307
5	0.0348	0.2745	–	–27.98	0.0357	–	–18.57	0.0539	1.858	1.858
4124 *«Sand 50–500 micron»* (Mualem, 1976)										
1	0.0703	0.4000	–	–74.59	0.0134	–	–52.04	0.0192	5.759	5.759
2	0.0551	0.4000	–48.03	–77.96	0.0334	–25.87	–56.51	0.0326	2.004	2.004
3	0.0740	0.4000	–	–78.14	0.0128	–	–54.62	0.0183	5.165	5.165
4	0.0512	0.4000	–47.03	–78.53	0.0317	–24.88	–56.85	0.0313	2.129	2.129
5	0.0722	0.4000	–	–78.28	0.0128	–	–54.55	0.0183	5.449	5.449
4126 *«Molonglo river sand»* (Mualem, 1976)										
1	0.0536	0.2770	–	–9.90	0.1010	–	–6.75	0.1481	2.163	2.163
2	0.0808	0.2770	0	–14.39	0.0695	5.00	–9.21	0.0704	2.569	2.569
3	0.0779	0.2770	–	–13.63	0.0734	–	–9.17	0.1091	1.903	1.903
4	0.0774	0.2770	0	–14.65	0.0683	4.79	–9.47	0.0701	2.588	2.588
5	0.0748	0.2770	–	–14.02	0.0713	–	–9.44	0.1059	1.958	1.958

Таблица 5*а*. Сравнение пяти WRC-функций в отношении погрешности аппроксимации главных (граничных) ветвей гистерезиса водоудерживающей способности 16-ти объектов (для «функции-лидера» указано наименьшее значение RMSE; отмечены функции, статистически неотличимые от лидера; оценен вклад аддитивного параметра в RMSE)

Почва (дисперсный грунт)	WRC-функции				
	WRC-VG	WRC-KT	WRC-KT_0	WRC-HT	WRC-HT_0
2002 «Silt Mont Cenis»	–	–	–	не отличается от лидера	0.0104 – лидер
		3 точнее, чем 2		4 и 5 не отличаются	
2003 «Silt of Nave-Yaar»	–	0.0023 – лидер	–	0.0023 – лидер	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
3101 «Rideau clayey loam»	–	0.0028 – лидер	–	не отличается от лидера	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
3301 «Carieol silt loam»	–	0.0036 – лидер	–	не отличается от лидера	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
3302 «Grenville silt loam»	не отличается от лидера	0.0069 – лидер	–	–	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
3305 «Ida silt loam (> 15 cm)»	–	0.0065 – лидер	–	–	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
3306 «Ida silt loam (0–15 cm)»	–	0.0088 – лидер	–	не отличается от лидера	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
3407 «Guelph loam»	не отличается от лидера	не отличается от лидера		0.0113 – лидер	не отличается от лидера
		2 и 3не отличаются		4 и 5 не отличаются	
3501 «Rubicon sandy loam»	–	0.0090 – лидер	–	не отличается от лидера	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
4004 «Loamy sand-hamra sharon»	–	0.0030 – лидер	–	не отличается от лидера	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
4106 «Sand #1»	–	не отличается от лидера	–	0.0051 – лидер	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
4107 «Sand #2»	–	0.0081 – лидер	–	–	Не отличается от лидера
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
4108 «Del Monte fine sand»	не отличается от лидера	–	–	0.0055 – лидер	Не отличается от лидера
		2 и 3не отличаются		4 и 5 не отличаются	
4112 «Oakley sand»	–	не отличается от лидера	–	0.0138 – лидер	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
4124 «Sand 50–500 micron»	–	не отличается от лидера	–	0.0083 – лидер	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
4126 «Molonglo river sand»	–	0.0042 – лидер	–	0.0042 – лидер	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	

Из табл. 5*а* видно, что в отношении погрешности аппроксимации опытных данных о главных и граничных ветвях гистерезиса преимущество моделей WRC-KT и WRC-HT перед моделью WRC-VG, предложенной Ван Генухтеном, выявлено для 13-ти из 16-ти объектов. При этом обнаружено преимущество функции WRC-HT перед WRC-KT. Кроме того, представленные данные свидетельствуют о целесообразности применения аддитивного параметра, учитывающего «*давление входа воздуха*», а также «*давление входа воды*», поскольку: для 13-ти из 16-ти объектов WRC-функции с указанным параметром достоверно точнее, чем их упрощенные аналоги (без аддитивного параметра), представляющие собой оригинальную функцию Косуги (Kosugi, 1994, 1996), а также оригинальную функцию Хаверкампа с соавторами (Haverkamp et al., 1977); трижды между функциями отсутствуют значимые отличия; только один раз исключение

аддитивного параметра существенно снижает погрешность точечной аппроксимации.

В табл. 5*b* представлены результаты сравнения WRC-функций из табл. 3 в отношении RMSE прогнозирования сканирующих ветвей гистерезиса $\theta(\psi)$ шести объектов (для которых имеются соответствующие опытные данные) из 16-ти на основе критерия Вильямса-Клута (Кобзарь, 2006) ($\lambda_{0.95}$ и $\lambda_{0.99}$).

Таблица 5*b*. Сравнение пяти WRC-функций в отношении погрешности прогнозирования сканирующих ветвей гистерезиса водоудерживающей способности 6-ти объектов (для «функции-лидера» указано наименьшее значение RMSE; отмечены функции, статистически неотличимые от лидера; оценен вклад аддитивного параметра в RMSE)

Почва (дисперсный грунт)	WRC-функции				
	WRC-VG	WRC-KT	WRC-KT$_0$	WRC-HT	WRC-HT$_0$
3101 «Rideau clayey loam»	0.0054 - лидер	–	не отличается от лидера	не отличается от лидера	–
		3 точнее, чем 2		4 и 5 не отличаются	
3301 «Carieol silt loam»	–	0.0052 – лидер	–	–	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
3501 «Rubicon sandy loam»	–	–	–	0.0117 – лидер	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
4106 «Sand #1»	–	не отличается от лидера	–	0.0129 – лидер	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
4107 «Sand #2»	–	–	–	0.0157 – лидер	
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	
4126 «Molonglo river sand»	–	0.0052 – лидер	–	не отличается от лидера	–
		2 точнее, чем 3		4 точнее, чем 5	

Из табл. 5*b* видно, что в отношении RMSE прогнозных оценок сканирующих ветвей существенное преимущество моделей WRC-KT и WRC-HT перед моделью Ван Генухтена WRC-VG имеет место для пяти объектов из шести. При этом установлено преимущество функции WRC-HT перед WRC-KT. Кроме того, приведенные данные указывают на целесообразность применения аддитивного параметра, учитывающего «*давление входа воздуха*», а также «*давление входа воды*», поскольку: *а*) для пяти из шести объектов WRC-функции с аддитивным параметром достоверно точнее, чем их упрощенные аналоги (без аддитивного параметра), т. е. оригинальная функция Косуги, а также оригинальная функция Хаверкампа с соавторами; *б*) ни для одного объекта не обнаруживается отсутствие значимых различий между функциями; *в*) только один раз исключение аддитивного параметра снижает погрешность аппроксимации. Отсюда следует, что WRC-функция Ван Генухтена уступает 3-м из 4-х других сравниваемых функций в отношении RMSE. Что касается аддитивного параметра, то результаты 22-х (16+6) вычислительных экспериментов убедительно подтверждают целесообразность его применения, поскольку: *а*) WRC-KT в 18-ти экспериментах точнее, чем WRC-KT$_0$; *б*) WRC-KT$_0$ в двух экспериментах точнее, чем WRC-KT; *в*) WRC-KT и WRC-KT$_0$ в двух экспериментах не различаются между собой; *г*) WRC-HT в 18-ти экспериментах точнее, чем WRC-HT$_0$; *д*) WRC-HT$_0$ ни в одном эксперименте не является более точной, чем WRC-HT; *е*) WRC-HT и WRC-HT$_0$ в четырёх экспериментах не различаются между собой.

ДИСКУССИЯ

Ван Генухтен справедливо предполагал, что при $-\alpha\psi \gg 1$ и $n \gg 1$ WRC-функция (3*a*) трансформируется в WRC-функцию Брукса-Кори (Brooks, Corey, 1964), но заблуждался, что при этом параметры предложенной им WRC-функции приобретают смысл параметров в оригинальной WRC-функции Брукса-Кори. Заблуждение заключается в том, что математические значения параметров могут быть сколь угодно близкими, но по своему смыслу они близкими быть не могут, поскольку смысл параметров или есть, или его нет. Так, настроечный (*fitting*) параметр n WRC-функции Ван Генухтена не может приобрести смысл статистики распределения пор по размерам или смысл наклона WRC-кривой даже при условии $n \gg 1$,а настроечный (*fitting*) параметр α WRC-функции Ван Генухтена не может приобрести смысл величины, обратно пропорциональной величине «*давления входа воздуха*», ни при каких допущениях. Это объясняется следующим образом: десорбционная WRC-кривая, как хорошо известно, начинает отклонятся от оси координат не от нулевого значения капиллярного давления, а от «*давления входа воздуха*», при котором, по определению, еще выполняется равенство $S_e = 1$при $\psi = \psi_0$ (табл. 2). Однако в WRC-функции (3*a*) параметр $\psi_0 - 1/\alpha$ не может учитывать «*давление входа воздуха*», поскольку $S_e = (1/2)^{1-1/n} \neq 1$ при $\psi = \psi_0$ (табл. 2). Стоит

отметить, что, как видно из табл. 4, условие $n \gg 1$ не выполняется ни для одного объекта из каталога Муалема. Также следует заметить, что во многих достаточно авторитетных литературных источниках тиражируется отмеченное заблуждение в отношении интерпретации параметров WRC-функции Ван Генухтена (Кожунов и др., 2023; Kadhim, 2011; Xianzhao et al., 2011; Oh et al., 2015; Bouchemella et al., 2016; Bouziane et al., 2021 и др.). Разумеется, данное заблуждение не умаляет значимости результатов, полученных в указанных (и многих других) публикациях, однако если бы авторы вместо WRC-функции Ван Генухтена применили бы физически (физико-статистически) обоснованные аналоги (хотя бы для сравнения), то, вне всякого сомнения, получили бы более весомые в отношении научной ценности результаты. Вместе с тем в литературе в немалом количестве встречаются также примеры достаточно корректной интерпретации параметров WRC-функции Ван Генухтена (Chen et al., 2016; Dogan-Demir et al., 2022 и др.).

Модель Ван Генухтена WRC-VG способна с условно приемлемой точностью описывать гистерезис $\theta(\psi)$ редко встречающихся почв и дисперсных грунтов, для которых главные ветви иссушения и увлажнения образуют полностью замкнутую петлю в интервале отрицательных значений ψ. Однако в зоне полного насыщения водой почвы или дисперсного грунта главные ветви гистерезиса могут смыкаться при положительных значениях ψ. Область определения WRC-функции Ван Генухтена ограничена значениями аргумента $\psi \leq 0$(табл. 3). В связи с этим, если главная ветвь увлажнения гистерезиса $\theta(\psi)$заканчивается при положительных значениях ψ, то WRC-функция Ван Генухтена не может с приемлемой точностью описать ни одну сканирующую ветвь увлажнения. Ранее предпринимались попытки выхода из указанного затруднения посредством стыковки двух разных WRC-функций в точке $\psi = 0$ (Faybishenko, 1995). Однако такую математическую операцию невозможно физически обосновать; кроме того, она превращает зависимость $\theta(\psi)$ в кусочно-непрерывную функцию, производная которой терпит разрыв в точке $\psi = 0$. Для решения дифференциального уравнения Ричардса (Richards, 1931) численными методами такая функция является весьма неудобной. Применение аддитивного параметра в физически (физико-статистически) обоснованных функциях WRC-KT, а также WRC-HT устраняет недостатки, характерные для WRC-функции Ван Генухтена. Как показано в работах (Терлеев и др., 2017, 2021, 2023), а также в настоящей статье, ситуация в отношении RMSE существенно изменяется в лучшую сторону, если используется аддитивный параметр, учитывающий «*давление входа воздуха*», а также *«давления входа воды*».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены результаты, позволяющие восполнить пробелы в физически адекватном математическом описании закономерностей, которым подчиняется водоудерживающая способность капиллярно-пористой среды, такой как почва или дисперсный грунт, с учетом феномена гистерезиса. Решены следующие задачи: 1) сформулированы WRC-функции с параметрами, для которых предложена физическая (физико-статистическая) и геометрическая интерпретация; 2) проведена верификация WRC-функций при помощи вычислительного эксперимента с использованием литературных данных о гистерезисе $\theta(\psi)$ 16-ти объектов исследования различного генезиса и текстуры; 3) выполнено сравнение RMSE сформулированных зависимостей, а также WRC-функции, предложенной Ван Генухтеном, на основе критерия Вильямса-Клута (Кобзарь, 2006), выявлены достоверные преимущества физически (физико-статистически) обоснованных аналогов перед эмпирической WRC-функцией Ван Генухтена.

Список литературы

Гиневский Р.С., Терлеев В.В., Топаж А.Г., Лазарев В.А. SOILHYSTERESIS-V.1.0. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019666861, 16.12.2019. Заявка № 2019662560 от 12.10.2019.

Глобус А.М. Экспериментальная гидрофизика почв. Л.: Гидрометеоиздат, 1969. 356 с.

Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: Изд. Физматлит, 2006. 816 с.

Кожунов А.В., Кокорева А.А., Болотов А.Г., Огородняя С.А. Параметризация и калибровка модели HYDRUS-1D при условии поверхностного стока по результатам мониторинга влажности дерново-подзолистой связнопесчаной почвы (Тверская область) // Материалы IV Международной научной конференции «Тенденции развития агрофизики: от актуальных проблем земледелия и растениеводства к технологиям будущего». ФГБНУ АФИ, 13–15 сентября 2023 г. СПб.: ФГБНУ АФИ, 2023. С. 547–558.

Терлеев В.В., Миршель В., Баденко В.Л., Гусева И.Ю. Усовершенствованный метод Муалема-Ван Генухтена и его верификация на примере глинистой почвы Бейт Нетофа // Почвоведение. 2017. № 4. С. 457–467 (DOI: 10.1134/S1064229317040135).

Терлеев В.В., Гиневский Р.С., Лазарев В.А., Топаж А.Г., Дунаева Е.А. Функциональное представление водоудерживающей способности и относительной гидравлической проводимости почвы с учетом гистерезиса // Почвоведение. 2021. №6. С. 715–724 (DOI: 10.1134/S1064229321060144).

Терлеев В. В., Лазарев В. А., Гиневский Р. С., Гарманов В. В., Дунаева Е. А. Сорок лет использования эмпирических функций Ван Генухтена и предложение их замены физически адекватными аналогами // Агрофизика. 2023. № 3. С. 49–61 (DOI: 10.25695/AGRPH.2023.03.07).

Bouchemella S., Ichola I.A., Séridi A. Estimation of the empirical model parameters of unsaturated soils. E3S Web of Conferences. 2016. 9 (Article Number 16007) (DOI: 10.1051/e3sconf/20160916007).

Bouziane O., Meddi M., Cardena J. R. Characterization of the Water Holding Capacity of the Soils in the Mitidja Plain (Algeria) as a Basis for the Development of the Irrigation Water Use // Taiwan Water Conservancy. 2021. 69(4): 104-122 (DOI: 10.6937/TWC.202112/PP_69(4).0007).

Brooks R.H., Corey A.T. Hydraulic Properties of Porous Media // Hydrology Papers 3, Colorado State University, Fort Collins, 1964. 27 p.

Chen G., Jiao L., Li X. Sensitivity Analysis and Identification of Parameters to the Van Genuchten Equation // Journal of Chemistry. 2016. Article ID 9879537 (DOI: 10.1155/2016/9879537).

Dogan-Demir A., Er H. Demir Y., Meral R. Estimating the Soil Water Retention Curve Using Different Empirical Models and a Piecewise Regression Method // Yuzuncu Yil University Journal of Agricultural Sciences. 2022. 32(3): 565-575 (DOI: 10.29133/yyutbd.1101682).

Faybishenko B.A. Hydraulic behavior of quasi-saturated soils in the presence of entrapped air: Laboratory experiments // Water Resources Research. 1995. 31(10): 2421-2435 (DOI: 10.1029/95WR01654 13.

Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration // Soil Sci. Soc. Am. J. 1977. 41: 285-294.

Kadhim A.J. Models to predict unsaturated hydraulic conductivity with the use of RETC code // Iraqi Journal of Agricultural Sciences. 2011. 42 (Special Issue): 150-164.

Kosugi K. Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention // Water Resour. Res. 1994. 30: 891-901.

Kosugi K. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties // Water Resour. Res. 1996. 32: 2697-2703.

Mualem Y. A catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils. Research Project 442. Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 1976. 100 p.

Oh S., Kim Y.K., Kim J.W. A Modified van Genuchten-Mualem model of hydraulic conductivity in Korean Residual soils // Water. 2015. 7(10): 5487-5502 (DOI: 10.3390/w7105487).

Richards L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums // J. Appl. Physics. 1931. 1(5): 318-333.

Scott P.S., Farquhar G.J., Kouwen N. Hysteretic effects on net infiltration // Proceeding of National Conference on Advances in Infiltration. Publication 11-83. American Society of Agricultural Engineers, St. Joseph, Michigan, 1983. pp. 163–170.

Terleev V.V., Nikonorov A.O., Ginevsky R.S., Lazarev V.A., Togo I., Topaj A.G., Moiseev K.G., Pavlova V.A., Layshev K.A., Arkhipov M.V., Melnichuk A.Yu., Dunaieva E.A., Mirschel W. Hysteresis of the soil water-retention capacity: estimating the scanning branches // Magazine of Civil Engineering. 2018. 1 (77): 141-148 (DOI: 10.18720/MCE.77.13).

Terleev V., Mirschel W., Nikonorov A., Lazarev V., Ginevsky R., Topaj A., Moiseev K., Pashtetsky V., Dunaieva I., Popovych V., Melnichuk A., Arkhipov M. Models of hysteresis water retention capacity and their comparative analysis on the example of sandy soil // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2019. 983: 462-471 (DOI: 10.1007/978-3-030-19868-8_46).

Terleev V., Lazarev V., Ginevsky R., Chusov A., Moiseev K., Mirschel W., Akimov L., Dunaieva I., Nikonorov A. Modeling the hysteretic soil water-retention capacity and eliminating the undesirable «pump effect» // Lecture Notes in Networks and Systems. 2022. 2: 1112-1122 (DOI: 10.1007/978-3-030-96383-5_124).

Van Genuchten M.Th. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J. 1980. 44: 892-989.

Xianzhao L., Xingxiu Y., Shujian X. A new method to estimate the parameters of van Genuchten retention model using degree of phosphorus saturation (DPS) // African Journal of Agricultural Research. 2011. 6 (20): 4800-4806 (DOI: 10.5897/AJAR11.700).

References

Ginevskiy R.S., Terleyev V.V., Topazh A.G., Lazarev V.A. SOILHYSTERESIS-V.1.0. *Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya EVM RU 2019666861, 16.12.2019.* Zayavka no. 2019662560 ot 12.10.2019. [SOILHYSTERESIS-V.1.0. Certificate of registration of the computer program RU 2019666861, 12/16/2019. Application No. 2019662560 dated 10/12/2019].

Globus A.M. *Eksperimental'naya gidrofizika pochv*. [Experimental soil hydrophysics]. L.: Gidrometeoizdat, 1969, 356 p.

Kobzar A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov*. [Applied Mathematical Statistics. For Engineers and Scientists]. M.: Izd. Fizmatlit, 2006, 816 p.

Kozhunov A.V., Kokoreva A.A., Bolotov A.G., Ogorodnyaya S.A. Parametrizatsiya i kalibrovka modeli HYDRUS-1D pri uslovii poverkhnostnogo stoka po rezul'tatam monitoringa vlazhnosti dernovo-podzolistoy svyaznopeschanoy pochvy (Tverskaya oblast') // *Materialy IV Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Tendentsii razvitiya agrofiziki: ot aktual'nykh problem zemledeliya i rasteniyevodstva k tekhnologiyam budushchego»*. FGBNU AFI, 13–15 sentyabrya 2023 g. [Parameterization and calibration of the HYDRUS-1D model under surface runoff conditions based on the results of moisture monitoring of sod-podzolic cohesive sandy soil (Tver region). Proceedings of the IV International Scientific Conference «Trends in the Development of Agrophysics: from Current Problems of Agriculture and Crop Production to Future Technologies» APRI, St. Petersburg, September 13–15, 2023]. SPb.: FGBNU AFI, 2023, pp. 547–558.

Terleyev V.V., Mirschel W., Badenko V.L., Guseva I.Yu. Usovershenstvovannyy metod Mualema-Van Genukhtena i yego verifikatsiya na primere glinistoy pochvy Beyt Netofa [An Improved Mualem-Van Genuchten method and its verification using data on Beit Netofa clay] // *Pochvovedeniye*, 2017, 50(4): 445-455 (DOI: 10.1134/S1064229317040135).

Terleyev V.V., Ginevskiy R.S., Lazarev V.A., Topazh A.G., Dunayeva Ye.A. Funktsional'noye predstavleniye vodouderzhivayushchey sposobnosti i otnositel'noy gidravlicheskoy provodimosti pochvy s uchetom gisterezisa [Functional description of water-retention capacity and relative hydraulic conductivity of the soil taking into account hysteresis] // *Pochvovedeniye*, 2021, 54 (6): 888-896 (DOI: 10.1134/S1064229321060144).

Terleyev V.V., Lazarev V.A., Ginevskiy R.S., Garmanov V.V., Dunayeva Ye.A. Sorok let ispol'zovaniya empiricheskikh funktsiy Van Genukhtena i predlozheniye ikh zameny fizicheski adekvatnymi analogami [Forty years of using the Van Genuchten empirical functions and a proposal to replace them with physically adequate analogues] // *Agrofizika*, 2023, 3: 49-61 (DOI: 10.25695/AGRPH.2023.03.07).

Bouchemella S., Ichola I.A., Séridi A. Estimation of the empirical model parameters of unsaturated soils. E3S Web of Conferences, 2016, 9 (Article Number 16007) (DOI: 10.1051/e3sconf/20160916007).

Bouziane O., Meddi M., Cardena J. R. Characterization of the Water Holding Capacity of the Soils in the Mitidja Plain (Algeria) as a Basis for the Development of the Irrigation Water Use // Taiwan Water Conservancy, 2021, 69 (4): 104-122 (DOI: 10.6937/TWC.202112/PP_69(4).0007).

Brooks R.H., Corey A.T. Hydraulic Properties of Porous Media // Hydrology Papers 3, Colorado State University, Fort Collins, 1964, 27 p.

Chen G., Jiao L., Li X. Sensitivity Analysis and Identification of Parameters to the Van Genuchten Equation // Journal of Chemistry, 2016, article ID 9879537 (DOI: 10.1155/2016/9879537).

Dogan-Demir A., Er H. Demir Y., Meral R. Estimating the Soil Water Retention Curve Using Different Empirical Models and a Piecewise Regression Method // Yuzuncu Yil University Journal of Agricultural Sciences, 2022, 32 (3): 565-575 (DOI: 10.29133/yyutbd.1101682).

Faybishenko B.A. Hydraulic behavior of quasi-saturated soils in the presence of entrapped air: Laboratory experiments // Water Resources Research, 1995, 31 (10): 2421-2435 (DOI: 10.1029/95WR01654 13).

Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration // Soil Sci. Soc. Am. J., 1977, 41: 285-294.

Kadhim A.J. Models to predict unsaturated hydraulic conductivity with the use of RETC code // Iraqi Journal of Agricultural Sciences, 2011, 42 (Special Issue): 150-164.

Kosugi K. Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention // Water Resour. Res., 1994, 30: 891-901.

Kosugi K. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties // Water Resour. Res., 1996, 32: 2697-2703.

Mualem Y. A catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils. Research Project 442. Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 1976, 100 p.

Oh S., Kim Y.K., Kim J.W. A Modified van Genuchten-Mualem model of hydraulic conductivity in Korean Residual soils // Water, 2015, 7 (10): 5487-5502 (DOI. 10.3390/w7105487).

Richards L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums // J. Appl. Physics, 1931, 1 (5): 318-333.

Scott P.S., Farquhar G.J., Kouwen N. Hysteretic effects on net infiltration // Proceeding of National Conference on Advances in Infiltration, Publication 11-83, American Society of Agricultural Engineers, St. Joseph, Michigan, 1983, pp. 163-170.

Terleev V.V., Nikonorov A.O., Ginevsky R.S., Lazarev V.A., Togo I., Topaj A.G., Moiseev K.G., Pavlova V.A., Layshev K.A., Arkhipov M.V., Melnichuk A.Yu., Dunaieva E.A., Mirschel W. Hysteresis of the soil water-retention capacity: estimating the scanning branches // Magazine of Civil Engineering, 2018, 1 (77): 141-148 (DOI: 10.18720/MCE.77.13).

Terleev V., Mirschel W., Nikonorov A., Lazarev V., Ginevsky R., Topaj A., Moiseev K., Pashtetsky V., Dunaieva I., Popovych V., Melnichuk A., Arkhipov M. Models of hysteresis water retention capacity and their comparative analysis on the example of sandy soil // Advances in Intelligent Systems and Computing, 2019, 983: 462-471 (DOI: 10.1007/978-3-030-19868-8_46).

Terleev V., Lazarev V., Ginevsky R., Chusov A., Moiseev K., Mirschel W., Akimov L., Dunaieva I., Nikonorov A. Modeling the hysteretic soil water-retention capacity and eliminating the undesirable «pump effect» // Lecture Notes in Networks and Systems, 2022, 2: 1112-1122 (DOI: 10.1007/978-3-030-96383-5_124).

Van Genuchten M.Th. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J., 1980, 44: 892-989.

Xianzhao L., Xingxiu Y., Shujian X. A new method to estimate the parameters of van Genuchten retention model using degree of phosphorus saturation (DPS) // African Journal of Agricultural Research, 2011, 6 (20): 4800-4806 (DOI: 10.5897/AJAR11.700).