

## ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОДУ-АППРОКСИМАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ АГРОЭКОСИСТЕМ

В. Г. Александров<sup>1</sup>, А. Г. Топаж<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Российско-Киргизский Славянский Университет,  
ул. Киевская, 44, Бишкек, 720000, Киргизия*

*E-mail: vikal47@rambler.ru*

<sup>2</sup> *ГНУ Агрофизический НИИ Россельхозакадемии,  
Гражданский пр., 14, Санкт-Петербург, 195220, Россия*

*E-mail: topaj@hotmail.ru*

*Поступила в редакцию 10 июля 2013 г., принята к печати 06 августа 2013 г.*

Предложена методика построения упрощенных аналогов для динамических моделей продукционного процесса сельскохозяйственных растений в классе систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены принципы структурной адаптации подобных аппроксимаций на расширенном пространстве агроэкологических условий путем использования формальных операторных дополнений и перспективы их использования для решения задач оперативного управления почвенно-растительным комплексом.

**Ключевые слова:** динамические модели агроэкосистемы, операторные дополнения, структурная адаптация, системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

### ВВЕДЕНИЕ

Динамические компьютерные модели продукционного процесса сельскохозяйственных растений приобретают все большее значение в качестве инструмента исследования в теоретической агроэкологии. Однако имеется ряд причин, ограничивающих возможность их широкого применения в решении практических задач земледелия и растениеводства. Прежде всего, внутренняя алгоритмическая сущность моделей достаточно сложна для понимания конечным пользователем. Порождаемые моделями динамические траектории поведения моделируемого объекта (агроэкосистемы) для конкретного сочетания входных факторов не всегда могут быть предсказаны заранее и однозначно интерпретированы. Таким образом, модель для любого исследователя, кроме ее автора, остается своеобразным «черным ящиком». Это было бы вполне приемлемо, если бы спектр решаемых задач ограничивался пассивной регистрацией результатов компьютерного эксперимента. Однако на практике модель зачастую должна использоваться для выработки рекомендаций по выбору наилучших агротехнологий, т. е. служить инструментом поиска оптимального стратегического и оперативного управления почвенно-растительным комплексом. Возможность качественного, а желательно и количе-

ственного аналитического исследования модели становится при этом важным условием ее потенциальной полезности. Для «черного ящика» данная возможность весьма невелика.

Другая проблема связана с трудностями структурной адаптации комплексных моделей, т. е. обеспечения их адекватности на широком классе почвенно-климатических условий. Действительно, в любой «феноменологической» модели все равно неизбежно присутствуют эвристические регрессионные соотношения, параметры которых не имеют физического смысла и должны идентифицироваться по данным полевых опытов. Это сужает степень универсализма модели, так как область доверия к ней становится ограниченной достаточно узким диапазоном почвенно-климатических условий, для которых были осуществлены структурная и параметрическая идентификация и верификация соответствующих уравнений регрессии. При этом адекватность как вида самих уравнений, так и найденных численных значений их параметров для альтернативных условий представляется сомнительной (Полуэктов и др., 2000). Как правило, наиболее существенные отклонения от экспериментальных данных демонстрируют решения, полученные в рамках «регионально-идентифицированной» модели для аномаль-

ных агроэкологических условий. Попытки исправить ситуацию с помощью дополнительной настройки параметров отнюдь не всегда дают желаемый результат. Причина может заключаться в том, что некоторые процессы, протекающие в почвенно-растительной системе, просто не были учтены в исходной модели. В то же время для определенных альтернативных условий они начинают оказывать значительное влияние на общую динамику биоценоза.

Озвученные проблемы носят достаточно серьезный характер. Достаточно сказать, что многие исследователи, стоявшие у истоков развития теории динамического моделирования агроэкосистем, со временем начали испытывать определенный скептицизм в отношении перспектив их широкого практического использования, все более склоняясь к гораздо более простым интегральным моделям типа «климат – урожай» (О. Д. Сиротенко, частное сообщение).

Можно сказать, что подобным образом проявляется так называемая «проблема сложности». Действительно, упрощение имеющихся информационных продуктов, в частности компьютерных моделей сложных динамических систем, с целью повышения их практической применимости и уменьшения «порога вхождения» для внешнего пользователя с определенного времени стало принципиальным. В текущей научной периодике представлено большое количество статей, посвященных вопросу построения упрощенных, легко интерпретируемых и практически востребованных аналогов для исходно сложных и трудно воспринимаемых моделей.

Для обозначения подобного процесса создания «моделей моделей» был предложен и широко использован в ряде публикаций термин «метамоделирование». В программной обзорной работе (Simpson и др.) рассмотрены основные стадии и принципы метамоделирования. В частности, там представлен перечень и проведено сравнение нескольких принципиальных алгоритмических подходов к построению редуцированных аналогов сложных моделей – параметризация поверхности отклика, нейронные сети, индуктивное обучение, кригинг и пр. Практические результаты использования

описанных методов (в частности, параметризации функции отклика) в приложении к моделям экологических процессов описываются в серии публикаций Эречуковой (Khaiter, Erechtkhoukova, 2007; Khaiter, Erechtkhoukova, 2011). Однако следует заметить, что речь в указанных работах идет исключительно о построении статических аналоговых моделей в форме «вход-выход», в то время как, например, постановка задачи оперативного управления подразумевает наличие динамических свойств в модели описываемого объекта.

Теоретические вопросы построения упрощенных аналогов сложных моделей с сохранением их динамического характера рассмотрены в работах и диссертации Эберляйна (Eberlein, 1989). Им предложена формальная теория редукции исходно сложных моделей системной динамики путем аппроксимации их наблюдаемого поведения линейаризованными соотношениями в форме систем обыкновенных дифференциальных уравнений. К сожалению, требование линейности аппроксимаций, выступающее в качестве необходимого условия применимости метода, зачастую оказывается слишком сильным для множества исходных моделей реальных систем.

Общие вопросы тестирования и валидации сравнительной адекватности упрощенных динамических аналогов и полных моделей-прототипов для экологических систем различного временного и пространственного масштаба рассмотрены в работе (Saysel, Barlas, 2006). Однако в ней отсутствуют рекомендации по методике построения упрощенных моделей: в качестве примеров приводятся готовые редуцированные аналоги, для каждого из которых конкретный подход к упрощению базовой модели определяется квалификацией разработчика и спецификой рассматриваемой предметной области.

Необходимость процедуры «метамоделирования» – упрощения базовых теоретических моделей агроэкосистем для решения конкретных задач – всегда достаточно отчетливо понималась и российскими специалистами в области математического моделирования продукционного процесса сельскохозяйственных посевов. При этом всегда

полагалось, что комплексные динамические модели агроэкосистемы (называемые далее «условно-полными» моделями) должны естественным образом использоваться как источник получения и испытательный полигон для прикладных редуцированных моделей. Действительно, огромным достоинством детальной исходной базовой модели является возможность использования для идентификации большого набора абсолютно доступных характеристик внутреннего состояния агроэкосистемы с любой степенью временного разрешения, что выгодно отличает компьютерный эксперимент от полевого опыта.

Так, в работе (Заславская, 1989) предлагался подход, связанный с получением и уточнением стандартных агрометеорологических прогнозов с помощью базовой модели продукционного процесса. В то же время следует признать, что статические агрометеорологические прогнозы, основанные на интегральных показателях рассматриваемого сезона вегетации (биоклиматический потенциал Шашко, гидротермические коэффициенты Селянинова и Рябчикова, потенциальный урожай по Ничипоровичу и др.), для большинства задач могут считаться неоправданно большим упрощением. Действительно, в данных моделях принципиально невозможно учесть конкретную динамику агроэкологических условий в ходе онтогенеза.

Отмеченного недостатка лишен метод, предложенный в работе Р. А. Полуэктова и А. Г. Топажа (2005), где описан алгоритм, позволяющий использовать динамическую модель вкупе с генератором статистических погодных реализаций для получения динамики формальной величины – интегральной благоприятности внешних условий. Построение регрессионных зависимостей данной характеристики от выбранных предикатов для разных стадий развития моделируемого посева позволяет придать упрощенной модели динамический характер, значительно повысив оправдываемость соответствующих прогнозов.

Однако все обозначенные выше подходы в целом не решают ни задачу обеспечения аналитического поиска оптимальных стратегий управления посевом, ни задачу обоснованной подстройки модели к локаль-

но-специфическим почвенно-климатическим условиям. Ниже изложен оригинальный подход к построению упрощенных аналогов условно-полной модели продукционного процесса, позволяющий, как представляется, в значительной мере снять поставленные вопросы. Он заключается в поиске аппроксимации исходной модели в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), их расширения (структурной адаптации) на множестве потенциальных внешних условий с помощью формальных операторных дополнений и использования полученных упрощенных моделей в задачах оптимального управления почвенно-растительным комплексом.

## ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Рассмотрим задачу построения упрощенного динамического аналога условно-полной модели продукционного процесса и его адаптации к изменяющимся агроэкологическим условиям. В качестве класса аппроксимаций исходной модели выберем ОДУ-представление почвенно-растительного комплекса. ОДУ-аналог – это система обыкновенных, в общем случае нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамическую связь продукционной фазовой переменной с управляемыми и неуправляемыми внешними факторами. Физические и физиологические коэффициенты ОДУ-аналога аналитически выражаются через параметры внешней среды и его собственные фазовые переменные.

Продемонстрируем подход на примере одного из возможных ОДУ-аналогов модели AGROTOOL, разработанной в лаборатории математического моделирования агроэкосистем Агрофизического НИИ. За основу построения ОДУ-аналога условно полной модели приняты упрощенные уравнения связи продукционной переменной (эффективной биомассы посева) и объемной влажности почвы (Казиев, 2011), в которых все коэффициенты представлены линейными функциями фазовых переменных ОДУ-аналога и неуправляемых переменных среды.

Более конкретно исследуемый ОДУ-аналог может быть представлен в виде:

$$\begin{cases} \dot{y} = (\bar{\alpha}, \bar{x})(K - y) \\ \dot{W} = qP - (\bar{\delta}, \bar{x}) - \\ - ay \left[ (\bar{\beta}, \bar{x})(1 - yK^{-1}) + (\bar{\alpha}, \bar{x}) \right] \end{cases}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} A_1 = a_{11} \frac{d}{dt} + a_{12} \frac{d^2}{dt^2} \\ A_2 = a_{21} \frac{d}{dt} + a_{22} \frac{d^2}{dt^2} \end{cases}. \quad (2)$$

где  $(\bar{\alpha}, \bar{x})$  – коэффициент расхода на дыхание;  $K$  – потенциальный биологический урожай (Шарифуллин, Кольцов, Марьин, 1989);  $q$  – коэффициент эффективности осадков;  $(\bar{\delta}, \bar{x})$  – испарение с поверхности почвы;  $a$  – коэффициент эффективности транспирации;  $(\bar{\beta}, \bar{x})$  – коэффициент роста посева;  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$  – векторы коэффициентов аппроксимации, а  $\bar{x} = (y, W, T, P, S_r)$  – вектор фазовых переменных и параметров среды. Коэффициенты  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$  определяются методом наименьших квадратов по расчётным данным условно полной модели и являются функциями времени.

Несмотря на нелинейный характер уравнений, составляющих систему (1), она допускает достаточно детальное аналитическое исследование. В частности, в рамках данной постановки можно, например, ставить и решать задачу одностороннего оптимального управления режимом влагообеспеченностью посевов, где в качестве управления выступает контролируемое поступление воды в систему  $P$ .

Рассмотрим принципы адаптации построенного ОДУ-аналога к произвольному изменению условий, для которых была проведена ее исходная параметрическая идентификация. Адаптацию модели (1) будем выполнять с помощью формального математического приема, т.н. операторных дополнений  $-A_1 y$  и  $-A_2 y$ , компенсирующих невязку расчётных и экспериментальных значений. Операторные дополнения учитывают влияние неучтенных процессов заранее неизвестной физической природы, проявление которых становится значимым на расширении области изменения параметров внешней среды. В качестве пояснения подхода операторы  $A_1$  и  $A_2$  представим в виде:

Данное операторное дополнение вносит структурное изменение в исходный ОДУ-оператор, учитывающее влияние на кинетику развития ПР-системы отклонение агроэкологических условий от эталонных. Можно сказать, что введение в уравнение (1) адаптивного операторного дополнения расширяет исходную область базовых явлений и систему понятий, в том числе и заложенных в логику построения исходной условно-полной модели.

Например, введение в уравнение линейного равномерного движения материальной точки второй производной от пути по времени расширяет область базовых явлений на понятие «ускорение движения», что позволяет описывать также и неравномерное движение под действием произвольной внешней силы.

Для системы уравнений (1) и дополнения (2) установлено, что из условий (3)

$$\begin{aligned} A_1 \tilde{y} &= 0, \quad A_2 \tilde{W} = 0, \\ \dot{\hat{y}} + A_1 \hat{y} &= \varphi_1(t, \hat{y}, \hat{W}), \\ \dot{\hat{W}} + A_2 \hat{W} &= \varphi_2(t, \hat{y}, \hat{W}), \end{aligned} \quad (3)$$

справедливы равенства (4):

$$a_{12} = -(\dot{\hat{y}}/\ddot{\hat{y}})a_{11}; \quad a_{22} = -(\dot{\hat{W}}/\ddot{\hat{W}})a_{21}, \quad (4)$$

где переменные  $\tilde{y}, \tilde{W}$  соответствуют эталонным агроэкологическим условиям, а  $\hat{y}, \hat{W}$  – условиям неудовлетворительной адаптации модели AGROTOOL.

Подставив операторные дополнения (2) в уравнения (1), с учётом соотношений (3), (4) получим ОДУ-аналог модели AGROTOOL, который необходимо идентифицировать в новых локальных агроэкологических условиях:

$$\begin{cases} \dot{y} = (\bar{\alpha}, \bar{x})(K - y) - a_1(\dot{y} - k_1\ddot{y}) \\ \dot{W} = qP - (\bar{\delta}, \bar{x}) + \\ + ay \left[ (\bar{\beta}, \bar{x})(1 - yK^{-1}) + (\bar{\alpha}, \bar{x}) \right]^{-}, \\ -a_2(\dot{W} - k_2\ddot{W}) \end{cases} \quad (5)$$

где:

$$\begin{aligned} a_{22} &= -k_2 a_{21}, \quad a_{12} = -k_1 a_{11}, \\ k_1 &= (\dot{y}/\ddot{y}), \quad k_2 = (\dot{W}/\ddot{W}). \end{aligned} \quad (6)$$

В системе уравнений (5) параметры адаптации  $k_1(t)$ ,  $k_2(t)$  характеризуют эталонные агроэкологические условия, а параметры  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  являются функциями адаптивной настройки ОДУ-аналога на изменённые условия среды.

Пусть будут известны параметры эталонных агроэкологических условий и функции фазовых переменных в данных условиях, тогда параметры адаптации  $k_1(t)$   $k_2(t)$  будут определены однозначно из равенств (6).

Функции  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  находятся из решения задачи минимизации отклонения результатов адаптированного ОДУ-аналога от динамики, порождаемой исходной условно-полной моделью, т. е. вариационной проблемы (7):

$$J(\bar{a}) = \int_0^T (\hat{y} - y)^2 \xrightarrow{\bar{a}} \min. \quad (7)$$

Аналитическая структура параметров  $k_1(t)$ ,  $k_2(t)$  определяет тип агроэкологических условий, в которых структура ОДУ-аналога неизменна, а изменяются только значения числовых констант в их аналитических выражениях.

Поясним сказанное на упрощенном примере. Пусть модель динамики биомассы в эталонных условиях описывается уравнением  $\dot{y} = \varphi(t, y)$ .

Для некоторых аномальных условий адаптирующее дополнение представим в виде:

$$A = a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \frac{d^2}{dt^2},$$

тогда  $k = (\dot{y}/\ddot{y})$ . Аппроксимируем переменную  $y$  для эталонных условий следующей функцией:

$$y = e^{-c_1 t} (c_2 t + c_3), \quad (8)$$

тогда

$$k = -c_1 (c_2 t + c_3) + c_2 / c_1^2 (c_2 t + c_3) - 2c_1 c_2. \quad (9)$$

Таким образом, к **эталонным** условиям относится множество агроэкологических условий, которые можно с достаточной точностью аппроксимировать равенством (9).

Необходимо заметить, что операторное адаптивное дополнение (2) не единственно возможная структура, его можно записать в более общем виде:

$$\begin{cases} A_1 = a_{11} \frac{d^{m_{11}}}{dt^{m_{11}}} y^{m_{12}} + a_{12} \frac{d^{m_{21}}}{dt^{m_{21}}} y^{m_{22}} \\ A_2 = a_{21} \frac{d^{n_{11}}}{dt^{n_{11}}} W^{n_{12}} + a_{22} \frac{d^{n_{21}}}{dt^{n_{21}}} W^{n_{22}} \end{cases}, \quad (10)$$

где коэффициенты  $m_{ij}$  и  $n_{ij}$  – целые числа (для определённости),  $i = 1, 2, j = 1, 2$

Таким образом, задача адаптации ОДУ-аналога к аномальным условиям конкретного агроэкологического региона заключается в следующем:

1. по критерию  $k = (\dot{y}/\ddot{y})$  построить спектральное разложение множества наблюдаемых агроэкологических условий при заданном условии функциональной близости и данным биологического урожая;

2. для каждого элемента спектрального множества условий по дополнению в виде (10) подобрать с заданной точностью аппроксимации тип операторного адаптирующего дополнения модели (1);

3. решая задачу (7) с конкретным типом операторного адаптирующего дополнения модели (1), при заданном множестве допустимых начальных условий построить зависимости адаптирующих функций  $a_1(t, C)$  и  $a_2(t, C)$ , где  $C$  – вектор коэффициентов аппроксимации (8).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следует отметить некоторые существенные свойства предложенной методики построения и локальной адаптации ОДУ-аппроксимаций условно-полных моделей

продукционного процесса сельскохозяйственных культур.

- Предложенный алгоритм не является «моделезависимым», т. е. может быть применен для исследования произвольной внешней базовой модели продуктивности, отличной от AGROTOOL. Метод построения ее ОДУ-аналога полностью сводится к описанной выше процедуре.
- Разработанный метод структурной адаптации на основе операторных дополнений является практически неограниченно расширяемым на множестве возможных классов дополняющих дифференциальных операторов, так как условно-полная модель предоставляет достаточно объемный набор данных, интерпретируемых в данном случае как эталонные измерения для проверки упрощенной модели. Проблемы здесь сводятся лишь к увеличению потребной вычислительной мощности для осуществления процедуры идентификации.
- Формальный характер введения операторных дополнений позволяет исследователю абстрагироваться от физической природы явлений, приводящих к необходимости структурной адаптации модели к конкретным почвенно-климатическим условиям. Обусловленное операторным дополнением увеличение порядка или числа свободы системы повышает ее по-

тенциальную настраиваемость независимо от природы возмущений.

В заключение необходимо отметить, что настоящая работа носит, в основном, ознакомительный и методический характер. Практические исследования, связанные с построением ОДУ-аналогов модели AGROTOOL и их структурной адаптацией в сравнительно «экзотических» почвенно-климатических регионах, должны дать окончательный ответ на вопрос о применимости и востребованности предложенного подхода. Следует отметить, что в планы рабочей группы исследователей входит также построение соответствующих аппроксимаций для следующей версии AGROTOOL третьего уровня продуктивности (с учетом трансформации азотсодержащих соединений в почве и растительно-микробного взаимодействия). И, наконец, в среднесрочной перспективе стоит задача автоматизации процедур параметрической идентификации ОДУ-аппроксимаций путем их регистрации в качестве независимых внешних моделей в универсальной среде поливариантного анализа и организации многофакторного компьютерного эксперимента (Medvedev, Topaj, 2011).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Заславская Л. А. 1989. Построение прикладных агрометеорологических моделей на основе компьютерных экспериментов с базовой моделью продукционного процесса // Научно-технический бюллетень по агрономической физике. АФИ, № 76. С. 51–55.
- Казиев В.М. 2011. Введение в анализ, синтез и моделирование систем. Интернет университет информационных технологий. <http://www.intuit.ru/department/expert/intsys/16/>.
- Полуэктов Р. А., Опарина И. В., Топаж А. Г., Миршель В. 2000. Адаптируемость динамических моделей агроэкосистем к различным почвенно-климатическим условиям // Математическое моделирование. Т. 12, № 11. С. 3–16.
- Полуэктов Р. А., Топаж А. Г. 2005. Использование моделей продукционного процесса сельскохозяйственных культур при агрометеорологическом прогнозировании // Современные проблемы экологической метеорологии и климатологии. СПб.: Наука. С. 207–217.
- Шарифуллин Л. Р., Кольцов А. Х., Марьин Г. С. 1989. Интенсивная технология возделывания озимой ржи // Под ред. Л. М. Нефедова. М., Агропромиздат. С. 128.
- Eberlein R. L. 1989. Simplification and understanding of models // System Dynamics Review, V.5. P. 51–68.
- Khaiter P. A., Erehtchoukova M. G. 2007. From complex to simple in environmental simulation modeling // Oxley, L. and Kulasiri, D. (eds) MODSIM 2007 International Congress on Modelling and Simulation. Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand, December 2007. P. 2069 - 2075.
- Khaiter P. A., Erehtchoukova M.G. 2010. Model Aggregation and Simplification in Sustainable Environmental Management // The International Journal of Environmental, Cultural, Economic and Social Sustainability. V.6, Issue 1. P. 227–242.
- Medvedev S., Topaj A. 2011. Crop simulation model registrarator and polyvariant analysis. IFIP Advances in Information and Communication Technology. Т. 359 AICT. P. 295–301.
- Saysel, A. K., Barlas Y. 2006. Model simplification and validation with indirect structure validity tests // System Dynamics Review. V. 22. P. 241–62.
- Simpson T., Peplinski J., Kock P., Allen J. 2001. Metamodel for computer based engineering designs: survey and recommendations // Engineering with Computers 17. P. 129–150.