

по повышению плодородия земель для категории земель или объекта (участка) проводится расчетно-конструктивным методом.

ВЫВОДЫ

Особенности учета времени, неопределенности и рисков при установлении показателей эффективности инвестиций в мелиорацию земель определяются ограниченностью земельных ресурсов высокого уровня плодородия и продолжительностью реализации проектов мелиорации.

Замена дисконтированного чистого дохода на его модификацию – земельную ренту на единицу площади – и определение расчетной цены земли позволяют решить вопрос о

приведении к сопоставимому виду эффектов в проектах мелиорации длительного или бесконечного действия.

При расчетах эффективности инвестиций в мелиорацию необходимо учитывать тенденцию нормы дисконта к снижению во времени из-за уменьшения инфляционных рисков вложений в плодородие земель.

Норматив дисконтирования при определении эффективности мелиорации увеличивается или уменьшается в зависимости от ожидаемого срока службы фондов мелиорации и ввиду возможности рефинансирования накопленных сумм амортизационных отчислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Виленский П. Л., Лифшиц В. П., Смоляк С. А. 2001. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика. М. 832 с.
- Методические рекомендации по государственной кадастровой оценке земель сельскохозяйственного назначения. Утв. Приказом Минэкономразвития и торговли России от 01.07.2005 г. № 145. 2005. М.
- Методические рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов. 2-я редакция. Утв. Минэкономики РФ, Минфин РФ и Госстроем РФ от 21.06.1999 г. № ВК 477. 2000. М. 263 с.
- Никитин И. Д., Артемьева З. Н., Григорашенко Е. Е., Карпенко О. А., Лохматов Е. М. 2010. Оценка земель мелиоративного фонда. Спб., ОАО «СевНИИГиМ». 338 с.
- Федоренко Н. П. (ред.). 1989. Комплексная оценка эффективности мероприятий, направленных на ускорение научно-технического прогресса. Методические рекомендации. М. 118 с.
- Экономика мелиорации земель Нечерноземной зоны РСФСР. Справочник. Л., 1978. 288 с.

УДК [631.43+004.65]

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЧВЫ КАК КАПИЛЛЯРНО-ПОРИСТОГО ТЕЛА И УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА МУАЛЕМА-ВАН ГЕНУХТЕНА: ТЕОРИЯ

В. В. Терлеев¹, М. А. Нарбут², Топаж А. Г.³, В. Миршель⁴

¹ *Национальный исследовательский Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251, Россия*

² *Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., д.7-9, Санкт-Петербург, 199034, Россия*

³ *Агрофизический научно-исследовательский институт, Гражданский пр-т, 14, Санкт-Петербург, 195220, Россия*

⁴ *Leibniz Centre of Agricultural Landscape Research (ZALF), Eberswalder Strasse, 84, Muencheberg, 15374, Germany*

E-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru

Поступила в редакцию 04 мая 2014 г., принята к печати 05 июня 2014 г.

В рамках концепций о капиллярности и логнормальном распределении эффективных радиусов почвенных пор представлено теоретическое обоснование функции дифференциальной влагоемкости почвы и первообразной этой функции как характеристики водоудерживающей способности почвы в виде зависимости приведенной объемной влажности почвы от капиллярного давления влаги. С использованием данных функций и метода Муалема вычислено отношение гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги. Параметры почвенно-гидрофизических моделей интерпретированы. Предложены аппроксимации функций, описывающих водоудерживающую способность почвы и отношение гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги. Параметры аппроксимирующих функций оценены по физико-статистическим показателям почвы.

Ключевые слова: дифференциальная влагоемкость почвы, водоудерживающая способность почвы, гидравлическая проводимость почвы, капиллярность, логнормальное распределение эффективных радиусов почвенных пор.

ВВЕДЕНИЕ

В агрофизике, агрометеорологии и гидромелиорации для расчета динамики почвенной влаги широко применяется уравнение Ричардса, которое относится к классу дифференциальных уравнений в частных производных и в одномерном случае имеет вид:

$$\mu \partial \psi / \partial t = \partial (k(\partial \psi / \partial x - 1)) / \partial x - f_x, \quad (1)$$

где t - время (сут.); x - пространственная координата на оси (см), направленной вертикально вниз с началом отсчета на поверхности почвы; ψ - капиллярное давление почвенной влаги (см вод. ст.); μ - коэффициент дифференциальной влагоемкости почвы (см вод.ст.⁻¹); k - коэффициент гидравлической проводимости почвы (см·сут.⁻¹); f_x - функция стока, описывающая поглощение воды корнями растений (сут.⁻¹) (Полуэктов и др., 2003).

Для решения уравнения (1) необходимо описать входящие в него коэффициенты в явном виде. Известно, что они являются функциями $\mu = \mu(\psi)$ и $k = k(\psi)$, однако поиск формализации этих коэффициентов наталкивается на проблему отсутствия их исчерпывающего обоснования в рамках фундаментальных представлений о взаимодействии воды и твердой фазы почвы (Pолуэктов *et al.*, 2002; Баденко и др., 2011, 2013). Поэтому в качестве коэффициентов уравнения Ричардса обычно используются эмпирические зависимости, которые с той или иной точностью интерполируют экспериментальные данные (Заславский, Терлеев, 1988; Банкин др., 1988; Заславский и др., 1988; Арефьев и др., 2011; Терлеев и др., 2012а). Однако проблематичность физической интерпретации таких зависимостей неизбежно ставит вопрос о степени их универсальности.

В лабораториях принято измерять не функцию $\mu(\psi)$, а ее первообразную - изотерму десорбционного равновесия воды в виде зависимости объемной влажности почвы θ (см³·см⁻³) от капиллярного давления влаги ψ . Как известно, данная зависимость

является показателем водоудерживающей способности почвы и называется основной гидрофизической характеристикой (ОГХ) почвы (Глобус, 1969). Расчет дифференциальной влагоемкости почвы обычно сводится к интерполяции измеренной ОГХ и подбору аппроксимирующей функции, которая затем используется в вычислениях по формуле $\mu = d\theta/d\psi$. Вместе с тем, дифференцирование аппроксимаций является по определению неустойчивой операцией, которая может приводить к физически абсурдным результатам. В качестве негативного примера можно привести степенную функцию, широко применявшуюся ранее для интерполяции точек измененной ОГХ для последующего расчета μ . Но имеется и ряд позитивных примеров использования аппроксимаций ОГХ, к числу которых относится модель:

$$\bar{\theta} = 1 / (1 + (-\alpha\psi)^n)^m, \quad (2)$$

где $\bar{\theta} = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$ - приведенная объемная влажность почвы, θ_s - объемная влажность полного насыщения почвы влагой, θ_r - минимальный удельный объем жидкой воды в почве, α и n - эмпирические параметры.

При $m = 1 - 1/n$ модель (2) представляет собой аппроксимацию ОГХ, предложенную Ван Генухтенем (Van Genuchten, 1980), а при $m = 1$ зависимость (2) имеет форму аппроксимации ОГХ предшественников (Brutsaert, 1966; Ahuja, Swartzendruber, 1972; Haverkamp *et al.*, 1977). Ван Генухтен использует модель (2) для расчета отношения функции гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации почвенной влаги k_s по методу Муалема (Mualem, 1976):

$$k/k_s = \sqrt{\bar{\theta}} \left(\int_0^{\bar{\theta}} d\bar{\theta} / \psi \Big/ \int_0^1 d\bar{\theta} / \psi \right)^2. \quad (3)$$

С использованием переменной $y = \bar{\theta}^{1/m} = 1 / (1 + (-\alpha\psi)^n)$ выражение (3) приводится к виду:

$$k/k_s = \sqrt{\bar{\theta}} \left(\int_0^{\bar{\theta}^{1/m}} y^{m-1+1/n} (1-y)^{-1/n} dy \Big/ \int_0^1 y^{m-1+1/n} (1-y)^{-1/n} dy \right)^2. \quad (4)$$

В случае $m = 1 - 1/n$ выражение (4) допускает несложное аналитическое вычисление, а результат интегрирования является следующим:

$$k/k_s = \sqrt{\bar{\theta}} \left(1 - (1 - \bar{\theta}^{1/m})^m \right)^2. \quad (5)$$

Формула (5) привлекает своей простотой, а также тем, что входящие в нее параметры являются общими и для функции гидравлической проводимости почвы, и для аппроксимации ОГХ (2). Именно поэтому модель (2) с отношением $m = 1 - 1/n$ заняла лидирующие позиции в семействе моделей водоудерживающей способности почвы и в купе с зависимостью (5) имеет наиболее широкое применение в агрофизических и агрометеорологических расчетах. Описание гидрофизических свойств почвы с использованием моделей (2) и (5), имеющих общие параметры, принято называть методом Муалема-Ван Генухтена.

В литературе отмечается, что для почвы относительно однородной текстуры (песок, супесь, глина) высокая точность интерполяции экспериментальных данных с использованием аппроксимации ОГХ (2) достигается при выполнении соотношения $m = 1 - 1/n$, а для почвы менее однородного гранулометрического состава (суглинок) модель (2) наиболее точно интерполирует точки измеренной ОГХ при $m = 1$ (Vereecken *et al.*, 2010). Успешному применению модели (2) в качестве аппроксимации ОГХ для широкого набора разновидностей почвы препятствуют следующие три проблемы. Во-первых, физически адекватное описание ОГХ, дифференциальной влагоемкости и гидравлической проводимости почвы до сих пор не предложено. Во-вторых, обоснованность соотношения $m = 1 - 1/n$, связывающего два параметра аппроксимации ОГХ и применяемого для упрощения аналитического интегрирования в формуле Муалема, более чем проблематична. В-третьих, представленная в литературе интерпретация параметров α и n модели (2) при $m = 1 - 1/n$ остается весьма дискуссионной.

Целью данной работы является: а) теоретическое обоснование и формулирование системы функций с общими и адекватно интерпретированными параметрами, объединяющей функцию дифференциальной влагоемкости почвы, ее первообразную в виде ОГХ и отношение функции гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги; б) аппроксимация зависимостей $\theta(\psi)$ и $k(\psi)/k_s$ в классе элементарных функций и оценивание параметров аппроксимирующих функций по физическим показателям почвы.

Дифференциальная влагоемкость и водоудерживающая способность почвы

Известно, что в почвах естественного сложения поры являются преимущественно капиллярными. В поперечном сечении капилляры весьма различаются и по конфигурации, и по площади, что обусловлено случайным сочетанием контактирующих почвенных частиц различной формы и объема. В качестве основы моделирования гидрофизических свойств почвы, твердая фаза которой состоит преимущественно из минералов, не набухающих при увлажнении, здесь принято представление о системе цилиндрических пор кругового поперечного сечения, эквивалентной по своим капиллярным свойствам реальному поровому пространству почвы, а для описания распределения объемов почвенных капилляров используется модель случайной логарифмически нормальной величины – *эффективного радиуса поры* (D'Hollander, 1979; Kosugi, 1996; Терлеев, 2000; Полуэктов, Терлеев, 2002, 2005; Терлеев и др., 2014). По аналогии с работой Косуги в качестве эффективного радиуса почвенной поры примем величину $\bar{r} = (r - r_{\min}) / (r_{\max} - r)$, где r - радиус поры; r_{\min} - радиус мельчайшей поры, а r_{\max} - радиус самой крупной поры (Kosugi, 1994).

С учетом случайного характера поперечного сечения почвенных пор запишем соотношение для расчета доли объема порового пространства $\bar{\theta}_1$, которая приходится на капилляры, начиная с мельчайших, и заканчивая порами эффективного радиуса \bar{r} :

$$\begin{cases} d\bar{\theta}_1/d\bar{r} = f(\bar{r}) = \exp(-1/(2\sigma^2)\ln^2(\bar{r}/\bar{r}_0))/(\bar{r}\sigma\sqrt{2\pi}), \\ \bar{\theta}_1 = \int_0^{\bar{r}} f(\bar{r})d\bar{r}, \end{cases} \quad (6)$$

где $f(\bar{r})$ - плотность логнормального распределения случайной величины \bar{r} ; $\ln \bar{r}_0$ и σ - наиболее вероятное значение и среднеквадратическое отклонение логарифмов эф-

фективных радиусов почвенных пор, соответственно.

Введем переменную $x = \ln(\bar{r}/\bar{r}_0)/(\sigma\sqrt{2})$ и перепишем формулы (6) следующим образом:

$$\begin{cases} d\bar{\theta}_1/dx = \exp(-x^2)/\sqrt{\pi}, \\ \bar{\theta}_1 = \int_{-\infty}^x \exp(-x^2)dx/\sqrt{\pi} = (\operatorname{erf}(x)+1)/2 = (1/2)\operatorname{erfc}(-x), \end{cases} \quad (7)$$

где $\operatorname{erf}(x)$ - функция ошибок ($\operatorname{erf}(x_0)=0$ и $\bar{\theta}_1(x_0)=1/2$ при $x = x_0 = 0$); $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$.

Из формул (7) вытекает соотношение:

$$4\bar{\theta}_1(1-\bar{\theta}_1) = 1 - \operatorname{erf}^2(x). \quad (8)$$

Воспользуемся аппроксимацией Виницкозо $1 - \operatorname{erf}^2(x) \approx \exp(-x^2((4/\pi)+ax^2)/(1+ax^2))$, $a = 8(\pi-3)/(3\pi(4-\pi))$ и приведем ее к более простому виду: $1 - \operatorname{erf}^2(x) \approx \exp(-x^2)$ (Winitzki, 2008; Терлеев и др., 2012б). Из формул (7) и (8) вытекает приближенное равенство $d\bar{\theta}_1/(\bar{\theta}_1(1-\bar{\theta}_1)) \approx (4/\sqrt{\pi})dx$; в нем, за-

менив переменную $\bar{\theta}_1$ новой переменной $\bar{\theta}_2$, а знак приближенного равенства знаком точного равенства, получим аналог уравнения Ферхюльста $d\bar{\theta}_2/(\bar{\theta}_2(1-\bar{\theta}_2)) = (4/\sqrt{\pi})dx$. Решением полученного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с граничным условием $\bar{\theta}_2(x)|_{x=0} = \bar{\theta}_1(x)|_{x=0} = 1/2$ является логистическая кривая $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_2(x)$, которая аппроксимирует зависимость $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(x)$ в классе элементарных функций:

$$\bar{\theta}_1 = (1/2)\operatorname{erfc}(-x) \approx \bar{\theta}_2 = 1/(\exp(-4x/\sqrt{\pi})+1). \quad (9)$$

Учитывая связь между величинами x и \bar{r} , приведем формулу (9) к виду:

$$\bar{\theta}_1 = (1/2)\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{(\sigma\sqrt{2})}\ln(\bar{r}_0/\bar{r})\right) \approx \bar{\theta}_2 = 1/\left(1+(\bar{r}/\bar{r}_0)^{-4/(\sigma\sqrt{2\pi})}\right). \quad (10)$$

Для преобразования формулы (9) рассмотрим возможность перехода от \bar{r} к ψ , а также от $\bar{\theta}_1$ к $\bar{\theta}$. Как известно, разность между значениями абсолютного давления под искривленной границей раздела «воздух-капиллярная влага» P и под плоской поверхностью свободной воды P_a называется капиллярным давлением влаги, для расчета которого применяется закон Лапласа:

$$\psi = P - P_a = -\beta/r,$$

где r - радиус почвенного капилляра, $\beta = 2\gamma\cos\phi/(g\rho_w)$, γ - коэффициент поверхностного натяжения почвенной влаги на границе с воздухом, ϕ - краевой угол смачивания водой поверхности частиц почвы, g -

ускорение свободного падения, ρ_w - плотность воды.

При физическом моделировании иссушения почвы с помощью пневматического пресса вытеснение из нее воды достигается воздействием избыточного давления атмосферных газов на исходно насыщенный влагой (без заземленного воздуха в порах) почвенный образец, который помещен на пористую мембрану. С увеличением газового давления над поверхностью воды в почвенных порах от нормального внешнего атмосферного давления P_a до значения P_{ae} происходит растворение воздуха в воде, однако содержание воды в поровом пространстве практически не изменяется, и объемная

влажность почвы остается равной θ_s . Избыточное газовое давление передается воде, абсолютное давление которой также повышается. При достижении избытка давления газов значения $\Delta P_{ae} = P_{ae} - P_a$ сила взаимодействия между молекулами воды и поверхностью почвенных частиц ослабевает настолько, что часть воды переходит в категорию свободной гравитационной влаги и стекает из почвы через мембрану в поддон, а освободившийся объем пор занимает воздух. Избытку газового давления в пневматическом прессе относительно внешнего атмосферного давления соответствует значение капиллярного давления влаги в самой крупной почвенной поре $\psi_{ae} = -\Delta P_{ae} = -\beta/r_{max} < 0$. Это значение называется *давлением барботирования*; его далее будем рассматривать в качестве «нача-

ла отсчета» капиллярного давления влаги. Для случая $r_{min} \ll r$ примем $r_{min} = 0$ и с учетом того, что $\bar{r} = (r - r_{min}) / (r_{max} - r)$, получим формулы:

$$\begin{cases} \psi - \psi_{ae} = -\beta / (r_{max} \bar{r}); \\ \psi_0 - \psi_{ae} = -\beta / (r_{max} \bar{r}_0), \end{cases}$$

где $\bar{r}_0 = r_0 / (r_{max} - r_0)$; r_0 - радиус почвенной поры, которому соответствует наиболее вероятное значение $\ln \bar{r}_0$ случайной величины $\ln \bar{r}$.

Воспользуемся полученными формулами и введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} \alpha = -1 / (\psi_0 - \psi_{ae}) = r_{max} \bar{r}_0 / \beta; \\ n = 4 / (\sigma \sqrt{2\pi}). \end{cases} \quad (11)$$

Используя закон Лапласа и обозначения (11), приведем соотношение (10) к виду:

$$\bar{\theta}_1 = \begin{cases} (1/2) \operatorname{erfc} \left((n\sqrt{\pi}/4) \ln(-\alpha(\psi - \psi_{ae})) \right) \approx \bar{\theta}_2 = 1 / (1 + (-\alpha(\psi - \psi_{ae}))^n), & \psi < \psi_{ae}; \\ 1, & \psi \geq \psi_{ae}. \end{cases} \quad (12)$$

Как известно, увлажнение почвы начинается с заполнения водой пор наименьшего размера, и лишь после их насыщения влага начинает занимать более крупные поры. Иссушение почвы начинается с вытеснения воды воздухом из пор наибольшего размера, и лишь после их опорожнения воздух начинает замещать воду в менее крупных порах. Во всех точках топологически сомкнутого водного пространства давление одинаково (*закон Паскаля*) и определяется наибольшим радиусом среди всех заполненных влагой пор. Учет этих фактов позволяет долю объе-

ма пространства пор $\bar{\theta}_1$ с эффективными радиусами, не превышающими \bar{r} , отождествлять с величиной приведенной объемной влажности почвы $\bar{\theta}$ при капиллярном давлении влаги ψ , которое однозначно соответствует величине \bar{r} , т.е. математическое тождество $\bar{\theta}_1 \equiv \bar{\theta}$ является физически обоснованным. В данном случае, во-первых, зависимость $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(\psi)$ является по определению ОГХ, и это позволяет переписать соотношение (12) в виде:

$$\begin{cases} \bar{\theta} = \begin{cases} (1/2) \operatorname{erfc} \left((n\sqrt{\pi}/4) \ln(-\alpha(\psi - \psi_{ae})) \right), & \psi < \psi_{ae}; \\ 1, & \psi \geq \psi_{ae}. \end{cases} & (13a) \\ \bar{\theta} \approx \begin{cases} 1 / (1 + (-\alpha(\psi - \psi_{ae}))^n), & \psi < \psi_{ae}; \\ 1, & \psi \geq \psi_{ae}. \end{cases} & (13b) \end{cases}$$

Во-вторых, зависимость $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(\psi)$ является первообразной функции приведенной дифференциальной влагоемкости почвы:

$$\bar{\mu} = d\bar{\theta}_1/d\psi = \begin{cases} -(n/4) / (\psi - \psi_{ae}) \exp \left(-\pi(n/4)^2 \ln^2(-\alpha(\psi - \psi_{ae})) \right), & \psi < \psi_{ae}; \\ 0, & \psi \geq \psi_{ae}. \end{cases} \quad (14)$$

Для случая $r_{max} \gg r$ примем $\psi_{ae} = 0$ и из формул (13a) и (14) придем к соотношениям, ранее полученным Косуги (Kosugi, 1994).

Отношение гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации почвенной влаги

По аналогии с работой Косуги (Kosugi, 1994) в расчетах по методу Муалема здесь не применяются эмпирические зависимости, которые интерполируют измеренную ОГХ, а используется функция приведенной дифференциальной влагоемкости почвы. Причем, данная функция теоретически обоснована в рамках представлений о капиллярности и геометрии порового пространства почвы. В соответствии с этими представлениями для случая тождественного равенства $\bar{\theta}_1$ и $\bar{\theta}$ за-

висимость $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(\psi)$ является первообразной функции приведенной дифференциальной влагоемкости почвы в форме ОГХ, а логистическая функция $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_2(\psi)$ аппроксимирует ОГХ. Учитывая, что в соответствии с формулами (13a) и (13b) при значении капиллярного давления влаги ψ_{ae} приведенная объемная влажность почвы $\bar{\theta}$ достигает единицы, применяя тождество $\bar{\theta}_1 \equiv \bar{\theta}$ и соотношения (9) и (11), преобразуем формулу (3) к виду:

$$\begin{aligned}
 k/k_s &= \sqrt{\bar{\theta}} \left(\int_0^{\bar{\theta}} d\bar{\theta}/\psi \Big/ \int_0^1 d\bar{\theta}/\psi \right)^2 = \sqrt{\bar{\theta}} \left(\int_{-\infty}^{\psi} (d\bar{\theta}/d\psi)(d\psi/\psi) \Big/ \int_{-\infty}^{\psi_{ae}} (d\bar{\theta}/d\psi)(d\psi/\psi) \right)^2 = \\
 &= \sqrt{\bar{\theta}} \left(\int_{-\infty}^{\psi-\psi_{ae}} (d\bar{\theta}/d(\psi-\psi_{ae}))(d(\psi-\psi_{ae})/(\psi-\psi_{ae})) \Big/ \int_{-\infty}^0 (d\bar{\theta}/d(\psi-\psi_{ae}))(d(\psi-\psi_{ae})/(\psi-\psi_{ae})) \right)^2 = \\
 &= \sqrt{\bar{\theta}_1(\bar{r})} \left(\int_0^{\bar{r}} \bar{r}(d\bar{\theta}_1/d\bar{r})d\bar{r} \Big/ \int_0^{\infty} \bar{r}(d\bar{\theta}_1/d\bar{r})d\bar{r} \right)^2 = \sqrt{\bar{\theta}_1(x)} \left(\int_{-\infty}^x \exp(-x^2 + x\sigma\sqrt{2})dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 + x\sigma\sqrt{2})dx \right)^2 = \\
 &= \left(\sqrt{\bar{\theta}_1(x)}/4 \right) \left(\operatorname{erf}(x - \sigma/\sqrt{2}) + 1 \right)^2 = \sqrt{\bar{\theta}(x)} \left(\bar{\theta}(x - \sigma/\sqrt{2}) \right)^2 \approx \sqrt{\bar{\theta}_2(x)} \left(\bar{\theta}_2(x - \sigma/\sqrt{2}) \right)^2.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Далее выполним переход от x к ψ и получим итоговые формулы, описывающие отношение функции гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации почвенной влаги, а также аппроксимацию этого отношения:

$$\begin{cases}
 k/k_s = \left[\frac{1}{(4\sqrt{2})} \sqrt{\operatorname{erfc}\left(\frac{n\sqrt{\pi}}{4}\right) \ln(-\alpha(\psi - \psi_{ae}))} \right] \left(\operatorname{erfc}\left(\frac{n\sqrt{\pi}}{4}\right) \ln(-\alpha(\psi - \psi_{ae})) + 2/\left(n\sqrt{\pi}\right) \right)^2, \psi < \psi_{ae}; \\
 1, \psi \geq \psi_{ae}. \\
 k/k_s \approx \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (-\alpha(\psi - \psi_{ae}))^n}} \right] \left(1 + \exp(8/(n\pi)) (-\alpha(\psi - \psi_{ae}))^n \right)^2, \psi < \psi_{ae}; \\
 1, \psi \geq \psi_{ae}.
 \end{cases}
 \tag{16a}$$

В частном случае (при $\psi_{ae} = 0$) отношение (16a) приводится к формуле Косуги (Kosugi, 1994). Модели (13a), (14) и (16a) образуют замкнутую по параметрам систему почвенно-гидрофизических функций, а зависимости (13b) и (16b) аппроксимируют ОГХ и отношение $k(\psi)/k_s$ в классе элементарных функций.

Интерпретация параметров гидрофизических функций почвы

Теоретически обоснованные модели (13a), (14) и (16a) имеют общие параметры, для которых здесь предложена физико-статистическая интерпретация. Параметр $\alpha = r_{\max} \bar{r}_0/\beta$ определяется: во-первых, произведением радиуса наибольшей поры r_{\max} и

эффективного радиуса поры \bar{r}_0 , при котором случайная величина $\ln \bar{r}$ достигает наиболее вероятного значения; во-вторых, капиллярными свойствами почвы, которые учитываются коэффициентом β в формуле Лапласа (если $r_{\max} \gg r_0$, то $\alpha = r_0/\beta$). Параметр $n = 4/(\sigma\sqrt{2\pi})$ - это величина, обратно пропорциональная стандартному отклонению логарифмов эффективных радиусов пор σ . Параметр ψ_{ae} имеет смысл давления барботирования на изотерме иссушения изначально влагонасыщенной почвы. Отмеченные в литературе (Шейн, 2005) связи параметра α с давлением барботирования, а также параметра n с дифференциальной влагоемкостью почвы здесь предлагается описывать соот-

ношениями $\alpha = -1/(\psi_0 - \psi_{ae})$ и $n = 4\bar{\mu}_0/\alpha$, где: ψ_0 - капиллярное давление влаги, соответствующее эффективному радиусу пор \bar{r}_0 (при $\psi = \psi_0$ приведенная объемная влажность почвы равна $\bar{\theta}_0 = 1/2$); $\bar{\mu}_0$ - значение функции приведенной дифференциальной влагоемкости почвы, вычисленное по формуле (14) при $\psi = \psi_0$. Функция приведенной дифференциальной влагоемкости почвы достигает своего максимума в т.н. *точке перегиба* кривой ОГХ при $\psi_{in} = \psi_{ae} + (\psi_0 - \psi_{ae}) \exp(-8/(\pi n^2))$; в данной точке объемная влажность почвы принимает значение $\theta_{in} = \theta(\psi_{in}) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)/(1 + \exp(-8/(\pi n^2)))$, которое, по мнению авторов, соответствует *максимальной капиллярно-сорбционной влагоемкости почвы* (Воронин, 1986; Terleev et al., 2010).

Результаты сравнения построенных моделей с аналогами и обсуждение

Далее поэтапно представлены результаты сравнительного анализа построенных моделей и хорошо известных формул Ван Генухтена (см. табл. и рис.).

Первый этап. Для построения кривых по формулам (2) и (5) обычно используется

измеренная ОГХ. Здесь предпринята имитация ОГХ с использованием данных, для вычисления которых заданы статистики нормального распределения логарифмов эффективных радиусов почвенных пор $\ln \bar{r}_0 = -1.1087$ и $\sigma = 0.6383$, а также характеристики капиллярных свойств порового пространства почвы $r_{max} = 0.149 \cdot 10^{-2}$ см; $\psi_{ae} = -100$ см вод.ст. и $\beta = 0.149$ см² (Brutsaert, 1966, 2000; Kosugi, Нормans, 1998; Kosugi, 1999). По формулам (11) с заданными показателями рассчитаны параметры функции дифференциальной влагоемкости почвы $\alpha = 0.33 \cdot 10^{-2}$ см вод.ст.⁻¹ и $n = 2.5$. Затем с использованием параметров α , n и ψ_{ae} по формуле (13a) построена кривая (на рис. - белые внутри точки), которая имитирует ОГХ. Наряду с этим по формуле (16a) построена кривая (на рис. - черные точки), которая имитирует отношение гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации почвенной влаги. Формулы (13b) и (16b) использованы для построения сплошных кривых 1 и 2, которые изображают аппроксимации соответствующих функций.

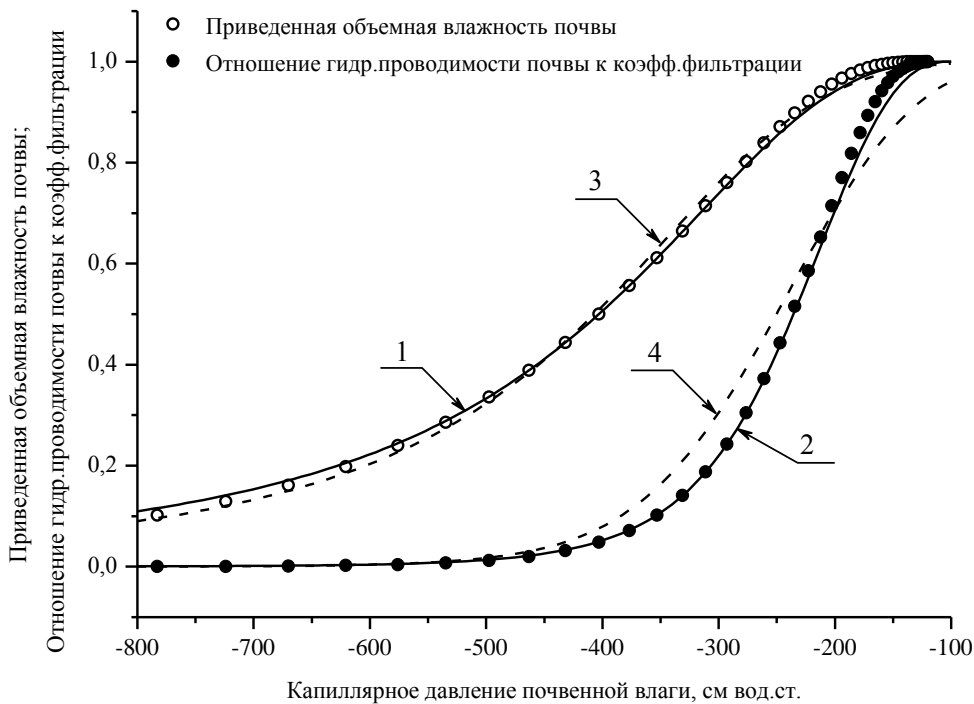


Рис. Сравнение формул Муалема-Ван Генухтена с предложенными аппроксимациями ОГХ и отношения гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги (пояснения в тексте)

Второй этап. При помощи модели (2) с соотношением $m=1-1/n$ интерполированы точки имитированной ОГХ, рассчитаны параметры этой модели и пунктиром построена кривая 3, которая изображает аппроксимацию ОГХ Ван Генухтена. С использованием этих же параметров построена пунктирная кривая 4, которая изображает отношение $k(\psi)/k_s$ (5), вычисленное методом Муалема-Ван Генухтена.

На рисунке видно, что модели (13b) и (2) имеют соизмеримую (одного порядка) достаточно высокую точность аппроксимации: средние квадраты отклонений расчет-

ных значений от имитированной эмпирической ОГХ составляют $0.101 \cdot 10^{-3}$ и $0.131 \cdot 10^{-3}$, соответственно. Из сравнения моделей (16b) и (5) следует, что первая имеет более высокую (на порядок) точность аппроксимации: средние квадраты отклонений расчетных значений от имитированного отношения $k(\psi)/k_s$ составляют $0.250 \cdot 10^{-3}$ и $0.289 \cdot 10^{-2}$, соответственно. При этом параметры моделей (13b) и (16b) оценены по заданным физико-статистическим показателям почвы, а параметры в формулах (2) и (5) вычислены методом интерполяции данных, которые имитируют ОГХ.

Таблица. Две системы почвенно-гидрофизических функций

Система Муалема-Ван Генухтена	Предложенная в настоящей статье система
Водоудерживающая способность почвы	
Аппроксимация ОГХ в виде функции, которая интерполирует экспериментальные данные $\bar{\theta} = \begin{cases} 1/(1 + (-\alpha\psi)^n)^m, & \psi < 0; \\ 1, & \psi \geq 0 \end{cases}$	Первообразная теоретически обоснованной функции дифференциальной влагоемкости почвы и аппроксимация этой первообразной $\bar{\theta} = \begin{cases} (\operatorname{erf}((-\sqrt{\pi}/4)\ln(-\alpha(\psi - \psi_{ae})))^n + 1)/2 \approx \\ \approx 1/(1 + (-\alpha(\psi - \psi_{ae}))^n), & \psi < \psi_{ae}; \\ 1, & \psi \geq \psi_{ae}. \end{cases}$
Дифференциальная влагоемкость почвы	
Производная функции, аппроксимирующей ОГХ $\frac{d\bar{\theta}}{d\psi} = \begin{cases} mn\alpha^n(-\psi)^{n-1}(1 + (-\alpha\psi)^n)^{-(m+1)}, & \psi < 0; \\ 0, & \psi \geq 0 \end{cases}$	Функция, обоснованная в рамках представлений о капиллярности и логнормальном распределении эффективных радиусов пор $\bar{\mu} = \begin{cases} -(n/4)/(\psi - \psi_{ae}) \exp(-\pi(n/4)^2 \ln^2(-\alpha(\psi - \psi_{ae}))), & \psi < \psi_{ae}; \\ 0, & \psi \geq \psi_{ae}. \end{cases}$
Отношение гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги	
Используется аппроксимация ОГХ с соотношением параметров $m = 1 - 1/n$ $\frac{k}{k_s} = \begin{cases} (1 + (-\alpha\psi)^n)^{-m/2} \times \\ \times \left(1 - \left(1 - (1 + (-\alpha\psi)^n)^{-1} \right)^m \right)^2, & \psi < 0; \\ 1, & \psi \geq 0. \end{cases}$	Используется теоретически обоснованная функция дифференциальной влагоемкости почвы $\frac{k}{k_s} = \begin{cases} \left(\frac{1}{(4\sqrt{2})} \sqrt{\operatorname{erfc}((n\sqrt{\pi}/4)\ln(-\alpha(\psi - \psi_{ae})))} \right) \times \\ \times \left(\operatorname{erfc}((n\sqrt{\pi}/4)\ln(-\alpha(\psi - \psi_{ae}))) + 2/(n\sqrt{\pi}) \right)^2 \approx \\ \approx (1 + (-\alpha(\psi - \psi_{ae}))^n)^{-1/2} \times \\ \times (1 + \exp(8/(n\pi))(-\alpha(\psi - \psi_{ae}))^n)^{-2}, & \psi < \psi_{ae}; \\ 1, & \psi \geq \psi_{ae}. \end{cases}$
Общие параметры почвенно-гидрофизических функций	
Эмпирические параметры α и n оцениваются методом интерполяции точек измеренной ОГХ или с использованием педотрансферных функций.	Физико-статистически интерпретированные параметры α и n теоретически обоснованных функций. Оценки параметров аппроксимаций данных функций по измеряемым показателям почвы: $\alpha = r_{\text{max}} \bar{r}_0 g_{pw} / (2\gamma \cos \varphi) \approx r_0 g_{pw} / (2\gamma \cos \varphi);$ $n = 4/(\sigma\sqrt{2\pi}).$

Выявлены следующие преимущества предложенной здесь системы гидрофизических функций почвы перед системой функций (2) и (5). Во-первых, принимая во внимание, что обе системы являются замкнутыми по параметрам, эти параметры адекватно интерпретированы только в построенных здесь моделях. Во-вторых, авторы настоящей статьи используют методологически более предпочтительный способ расчета отношения $k(\psi)/k_s$, в котором применяется теоретически обоснованная функция дифференциальной влагоемкости почвы, а не малодоступные данные измерений ОГХ, интерполированные функцией (2) с проблемным соотношением параметров $m=1-1/n$. В-третьих, по сравнению с формулами (2) и (5) предложенные здесь функции, аппроксимирующие ОГХ и отношение $k(\psi)/k_s$, имеют соизмеримую или более высокую точность, а их параметры оценены по физическим показателям почвы.

ВЫВОДЫ

1) Представлено теоретическое обоснование функции дифференциальной влагоем-

кости почвы и первообразной этой функции в виде ОГХ.

2) Усовершенствован метод Муалема-Ван Генухтена: в расчетах отношения функции гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации почвенной влаги модель (2) с проблемным соотношением параметров $m=1-1/n$ не применяется, а используется теоретически обоснованная функция дифференциальной влагоемкости почвы.

3) Параметры α , n и ψ_{ae} системы почвенно-гидрофизических функций адекватно интерпретированы в рамках представлений о почве как капиллярно-пористом теле.

4) Для ОГХ и отношения гидравлической проводимости почвы к коэффициенту фильтрации влаги предложены достаточно точные аппроксимации в классе элементарных функций, общие параметры которых оценены с использованием статистик лог-нормального распределения эффективных радиусов пор и показателей капиллярности почвы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке DAAD, DFG и РФФИ № 09-05-00415-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Арефьев Н.В., Баденко В.Л., Терлеев В.В., Латышев Н.К., Крылова И.Ю., Глядченкова Н.А. 2011. Определение водно-физических свойств почв при мелиоративных изысканиях. Мелиорация и водное хозяйство. 2:18-21.
- Баденко В.Л., Баденко Г.В., Терлеев В.В., Латышев Н.К. 2011. ГИС-технологии в информационном обеспечении системы имитационного моделирования AGROTOOL. Агрофизика. 3:1-5.
- Баденко В.Л., Терлеев В.В., Мишель В., Никонова О.Г. 2013. Учет пространственной вариабельности гидрофизических свойств почв при моделировании продукционного процесса растений. Агрофизика. 1:13-22.
- Банкин М.П., Заславский Б.Г., Терлеев В.В. 1988. Автоматизированная система определения влагопроводности почв. Научно-технический бюллетень по агрономической физике. 72:33-36.
- Воронин А.Д. 1986. Основы физики почв. М.: МГУ. 244 с.
- Глобус А.М. 1969. Экспериментальная гидрофизика почв. Л.: Гидрометеиздат. 356 с.
- Заславский Б.Г., Терлеев В.В. 1988. Моделирование гидрофизических характеристик почв: Тез. докл. Всес. школы-семинара «Автоматизация научных исследований и проектирования АСУ ТП в мелиорации». Фрунзе: ВНИИКАмелиорация. С. 82.
- Заславский Б.Г., Опарина И.В., Терлеев В.В. 1988. Диалоговая система формирования банка гидрофизических характеристик почв. Доклады Российской академии сельскохозяйственных наук. 11:40-42.
- Полуэктов Р.А., Терлеев В.В. 2002. Моделирование водоудерживающей способности и дифференциальной влагоемкости почвы. Метеорология и гидрология. 11:93-100.
- Полуэктов Р.А., Опарина И.В., Терлеев В.В. 2003. Три способа расчета динамики почвенной влаги. Метеорология и гидрология. 11:90-98.
- Полуэктов Р.А., Терлеев В.В. 2005. Моделирование водоудерживающей способности почвы с использованием агрогидрологических характеристик. Метеорология и гидрология. 12:98-103.
- Терлеев В.В. 2000. Моделирование водоудерживающей способности почв как капиллярно-пористых тел: Учеб.-метод. пособ. с предисловием А.М. Глобуса. СПб.: НИИ химии СПбГУ. 71 с.
- Терлеев В.В., Полуэктов Р.А., Бакаленко Б.И. 2012а. Структура информационного обеспечения модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. Агрофизика. 2:29-36.

- Терлеев В.В., Mirschel W., Баденко В.Л., Гусева И.Ю., Гурип П.Д. 2012б. Физико-статистическая интерпретация параметров функции водоудерживающей способности почвы Агрофизика. 4:1-8.
- Терлеев В.В., Топаж А.Г., Миршель В., Гурип П.Д. 2014. Моделирование водоудерживающей способности почвы на основе представлений о капиллярном гистерезисе и логнормальном распределении пор по размерам: теория. Агрофизика. 1:9-19.
- Шейн Е.В. 2005. Курс физики почв: Учебник. М.: Изд-во МГУ. 432 с.
- Ahuja L.R., Swartzendruber D. 1972. An improved form of soil-water diffusivity function. Soil Sci. Soc. Am. Proc. 36:9-14.
- Brutsaert W. 1966. Probability laws for pore-size distribution. Soil Sci. 101:85-92.
- Brutsaert W. 2000. A concise parameterization of the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Adv. in Water Resources. 23:811-815.
- D'Hollander E.H. 1979. Estimation of the pore size distribution from the moisture characteristic. Water Resour. Res. 15:107-112.
- Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. 1977. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration. Soil Sci. Soc. Am. J. 41:285-294.
- Kosugi K. 1994. Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention. Water Resour. Res. 30:891-901.
- Kosugi K. 1996. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties. Water Resour. Res. 32:2697-2703.
- Kosugi K., Hопmans J.W. 1998. Scaling water retention curves for soils with lognormal pore-size distribution. Soil Sci. Soc. Am. J. 62:1496-1505.
- Kosugi K. 1999. General model for unsaturated hydraulic conductivity for soil with lognormal pore-size distribution. Soil Sci. Soc. Am. J. 63:270-277.
- Mualem Y. 1976. A new model for predicting hydraulic conductivity of unsaturated porous media. Water Resour. Res. 12:513-522.
- Poluektov R.A., Fintushal S.M., Oparina I.V., Shatskikh D.V., Terleev V.V., Zakharova E.T. 2002. Agrootool - a system for crop simulation. Archives of Agronomy and Soil Science. 48(6):609-635.
- Terleev V.V., Mirschel W., Schindler U., Wenkel K.-O. 2010. Estimation of soil water retention curve using some agrophysical characteristics and Voronin's empirical dependence. International Agrophysics. 24(4):381-387.
- Van Genuchten, M.Th. 1980. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J. 44:892-989.
- Vereecken H., Weynants M., Javaux M., Pachepsky Y., Schaap M.G., Van Genuchten M.Th. 2010. Using pedotransfer functions to estimate the Van Genuchten-Mualem soil hydraulic properties: A review. Vadose Zone J. 9:795-820.
- Winitzki S. 2008. A handy approximation for the error function and its inverse (in <https://sites.google.com/site/winitzki/sergei-winitzkis-files/erf-approx.pdf?attredirects=0>).